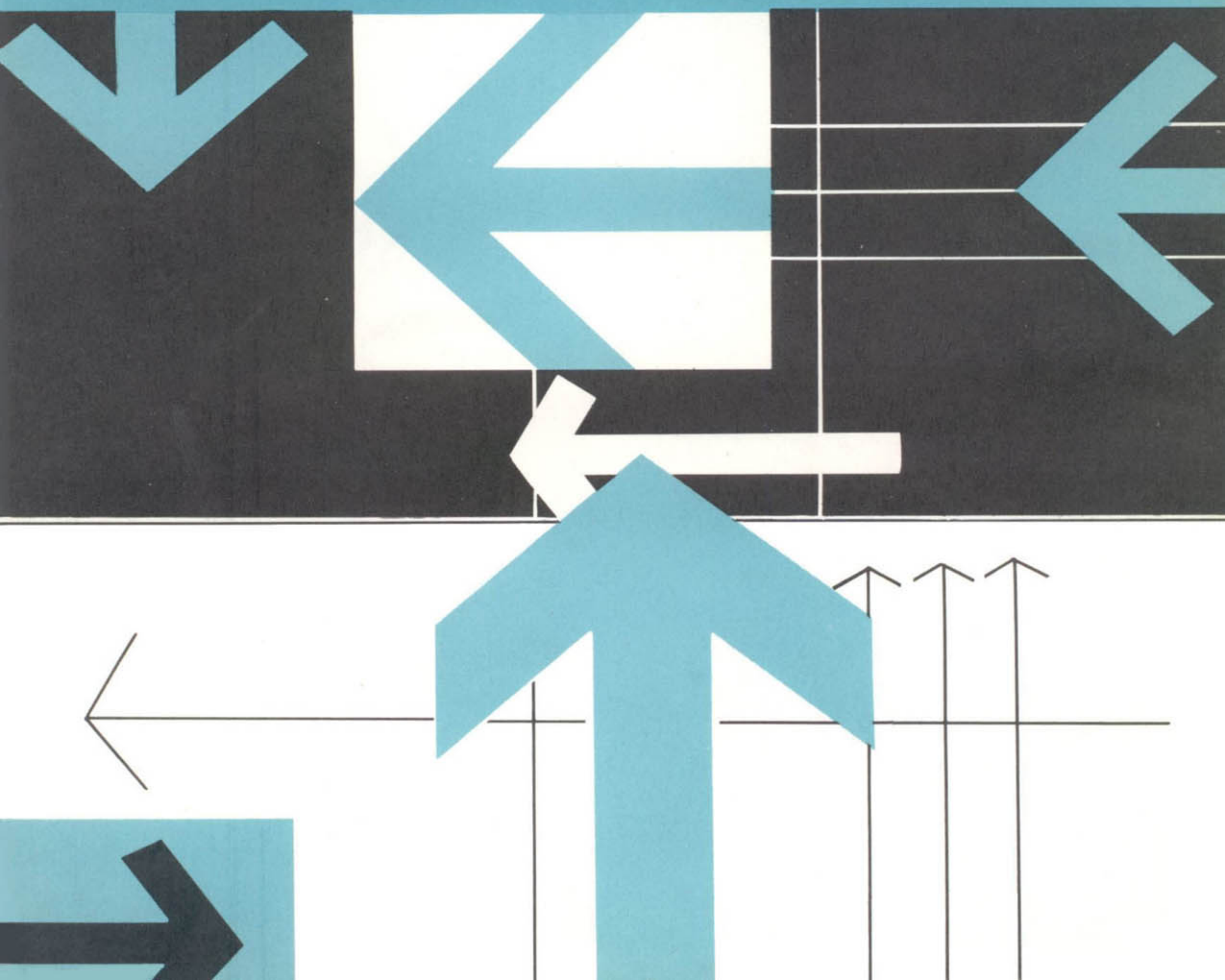
serie de matemática monografía no. 5

ALGEBRA LINEAL

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana, Secretaría General
Organización de los Estados Americanos



ALGEBRA LINEAL

por

ORLANDO E. VILLAMAYOR

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C. - 1967

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana

Editora: Eva V. Chesneau

NOTA DE INTRODUCCION

La colección de monografías científicas forma parte de los programas generales de información y publicaciones del Departamento de Asuntos Científicos y tiene como finalidad principal difundir y presentar de manera sencilla los nuevos temas y métodos que surgen del rápido desarrollo de las ciencias y de la tecnología.

En la actualidad la colección consta de cuatro series, en español y portugués, sobre física, química, biología y matemática, pero se contempla la posibilidad de incluir otros ramos de las ciencias.

Desde su comienzo se dedicó estas monografías a los profesores y estudiantes de ciencias de nivel secundario y universitario básico, no obstante se aspira a que encuentren también acogida entre los hombres de ciencias dedicados a la investigación especializada y el público en general que se interese en adquirir información o conocimientos sobre la materia.

En esta oportunidad, la Unión Panamericana agradece a la Agencia para el Desarrollo Internacional y a la Fundación Nacional de Ciencias de los Estados Unidos por la significativa ayuda económica recibida en apoyo de este programa, así como al Dr. Orlando E. Villamayor, autor de la monografía, y al Dr. Alexandre Martins Rodrigues del Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, por la revisión técnica del manuscrito.

Jesse D. Perkinson
Director

INDICE

Página

1

EJEMPLOS INTRODUCTORIOS

1. Introducción

La orientación de la llamada matemática moderna consiste esencialmente en abandonar los sistemas axiomáticos categóricos y tratar de construir teorías que puedan abarcar cada vez más casos particulares.

El tema que vamos a estudiar en estas notas es un ejemplo. Nuestra tarea consistirá en extraer, de un cierto número de casos concretos, una serie de propiedades comunes con el objeto de tomarlas como puntos de partida o axiomas para desarrollar una teoría --aquí, los espacios vectoriales-- aplicable a todos esos casos que nos sirvieron de ejemplos iniciales y, por supuesto, a cualquier otro ejemplo que satisfaga los axiomas.

Así, "axioma" no significa más que eso, es decir, proposiciones de partida, que suponemos válidas sin demostración y de las cuales extraeremos los resultados o teoremas de la teoría. Abandonamos, pues, la idea clásica del axioma como verdad evidente.

Con esa idea se ha desarrollado esta exposición en cuatro capítulos. En el primero se citan ejemplos, en los cuales se hace notar la validez de ciertas propiedades. En el segundo, utilizando esa lista de propiedades por axiomas, se presenta la primera parte de la teoría elemental de los espacios vectoriales. Este segundo capítulo se ha desarrollado en forma paulatina tratando de introducir los conceptos gradualmente.

El tercer capítulo trata las transformaciones lineales, es decir, aquellas transformaciones que respetan las operaciones fundamentales de nuestra teoría, y el cuarto introduce una nueva noción: el producto interno.

Por razones de espacio se ha desarrollado el tercer capítulo directamente en dimensión n y se ha reducido el cuarto a las definiciones y propiedades más elementales.

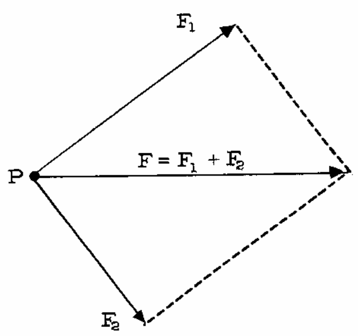
2. Primer Ejemplo Físico: Las Fuerzas que Pueden Actuar Sobre un Punto

Si consideramos un punto material P y las fuerzas que pueden actuar sobre P (en el espacio) tenemos en primer lugar que, dadas dos fuerzas F_1 y F_2, se puede encontrar una fuerza F, que los físicos llaman la ***resultante,*** que tiene la propiedad de ejercer sobre P la misma acción que F_1 y F_2 actuando simultáneamente.

Tenemos así, en el conjunto de las fuerzas, ***una operación binaria,*** es decir, una ley que a cada par ordenado de fuerzas hace corresponder una nueva fuerza, la resultante, que, al sólo efecto de tener una notación, podemos escribir $F = F_1 + F_2$.

Nos interesa buscar algunas propiedades de esta operación, que más adelante han de servir de base para obtener los resultados que nos proponemos estudiar.

Usando los conocimientos elementales de física sabemos que, si F_1 y F_2 actúan sobre el punto P, y si representamos cada fuerza por un segmento cuya dirección y sentido es el de la fuerza dada, y su longitud --en una escala determinada-- mida a
2 la intensidad, entonces la resultante queda determinada por la diagonal del paralelogramo, dos de cuyos lados son los segmentos correspondientes a F_1 y F_2.



Si llamamos $\mathcal{J}$ al conjunto de todas las fuerzas que actúan sobre P, tenemos en primer lugar:

S_1) si F_1, $F_2 \in \mathcal{J}$, entonces $F_1 + F_2 \in \mathcal{J}$.

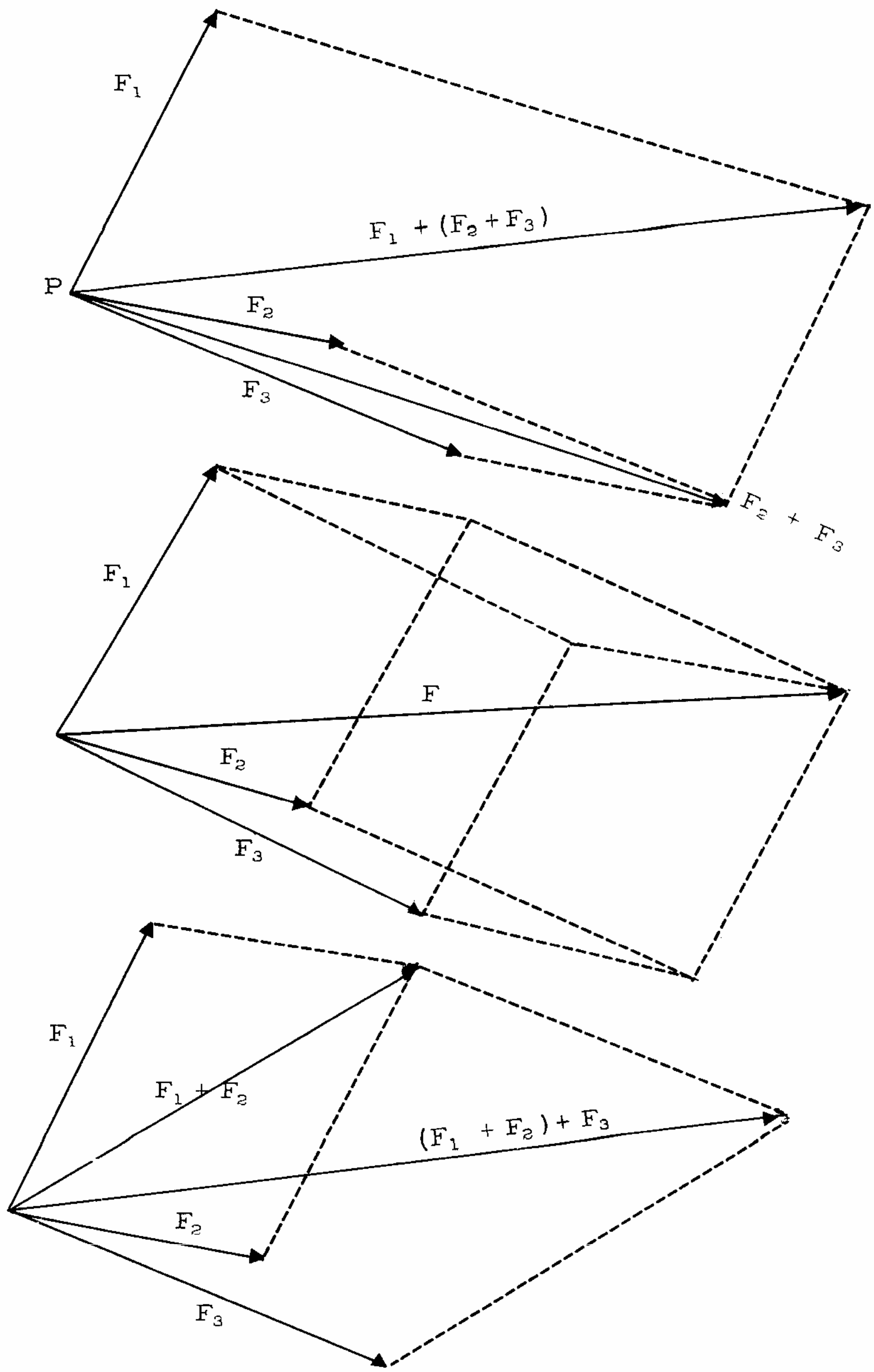
Si tenemos tres fuerzas F_1, F_2, F_3, podemos calcular su resultante de dos formas distintas: $(F_1 + F_2) + F_3$ ó bien $F_1 + (F_2 + F_3)$; es decir, calcular primero $F = F_1 + F_2$ y luego la resultante de F con F_3, ó bien calcular primero $F' = F_2 + F_3$ y luego la resultante de F_1 y F'.

Un razonamiento geométrico elemental muestra que

S_2) $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$.

La misma definición muestra, al mismo tiempo, que el orden en que se consideran las fuerzas no altera la resultante, es decir,

S_3) $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$.



3

Por otra parte, existe la fuerza nula, o sea una fuerza de intensidad cero (por consiguiente, de dirección indeterminada). Esta fuerza, que podemos llamar 0, tiene la propiedad de que

S_4) $0 + F = F$ para todo $F \in \mathcal{J}$.

Por último, si llamamos la opuesta F' de una fuerza F a aquélla que tiene igual intensidad y dirección que F pero sentido contrario, encontraremos que la resultante de F y F' es cero, es decir

S_5) Para cada F existe F', tal que $F + F' = 0$.

Esta F' será llamada $-F$.

Por lo que veremos más adelante, estas cinco propiedades de la operación de "suma" van a ser suficientes para construir toda nuestra teoría, pero ahora nos interesa definir una nueva operación.

Si F es una fuerza y a un número real, vamos a llamar aF la fuerza que tiene la misma dirección de F, cuya intensidad es $|a|$ veces la de F y su sentido es el mismo si a es positivo u opuesto si a es negativo.

En esta forma tenemos definida una nueva operación, cuyos "factores" son una fuerza y un número real y su resultado es otra vez una fuerza. Es del tipo de operaciones llamadas *externas* porque, siempre trabajando en el conjunto $\mathcal{J}$, uno de los elementos que interviene (el número a) no pertenece a dicho conjunto.

Veamos algunas propiedades de esta operación:

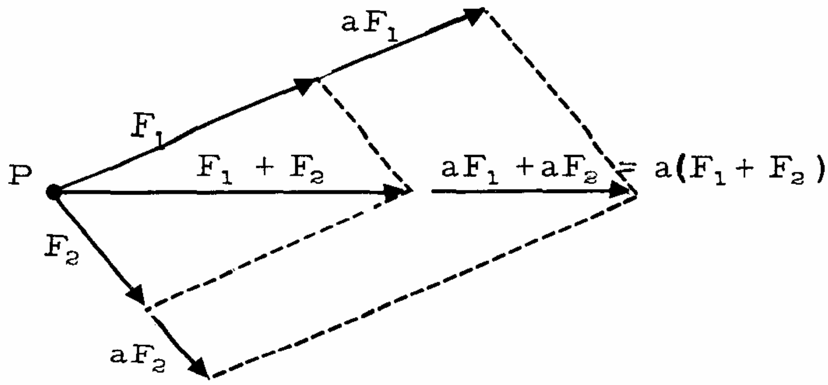
P_1) Si a es un número real y $F \in \mathcal{J}$, entonces $aF \in \mathcal{J}$.
P_2) $a(bF) = (ab)F$.

Las propiedades P_1) y P_2) resultan directamente de la definición. P_2) significa que si tomamos primero la fuerza bF y la multiplicamos por a es igual a multiplicar F por ab.

P_3) $a(F_1 + F_2) = aF_1 + aF_2$.

Esto se verifica utilizando propiedades elementales de semejanza de triángulos mediante la figura 3. (Se deja al lector los detalles de la demostración.)

P_4) $(a + b)F = aF + bF$.



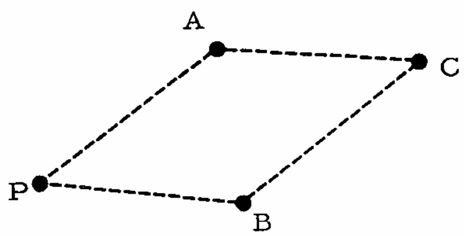
P_5) $1 \cdot F = F$.

(P_4) y P_5) resultan de la definición.)

Observación. $\mathcal{F}$ es el conjunto de fuerzas del espacio que actúa sobre P. Si consideramos que P está en un plano π y consideramos sólo las fuerzas cuyas direcciones son rectas de π, obtenemos otro conjunto donde también se cumplen las diez propiedades estudiadas.

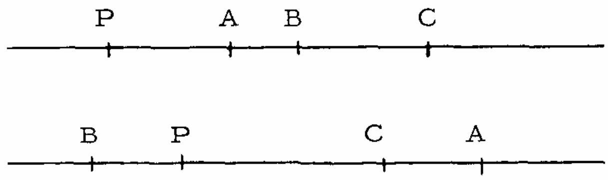
3. Segundo Ejemplo Físico: Los Desplazamientos que Puede Sufrir un Punto

Volvamos a considerar un punto P en el espacio y el conjunto de desplazamientos que puede sufrir P. Representamos por el segmento PA el desplazamiento de P hasta un lugar A.



Dados dos desplazamientos, PA y PB, llamemos suma PA + PB al desplazamiento que lleva P a C, donde C es el cuarto vértice del paralelogramo de lados PA y PB.

Esta definición no se aplica cuando PA y PB están sobre una misma recta. En este caso tomamos C de modo que la distancia de P a C sea la suma de las distancias de P a A y de P a B siempre que A y B estén del mismo lado o su diferencia en el caso contrario, tomando C siempre del lado más alejado, como por ejemplo:



Como la construcción geométrica para determinar la suma de PA + PB es similar a la utilizada para calcular la resultante de dos fuerzas, y llamando $\mathcal{D}$ al conjunto de los dezplazamientos, entonces son válidas las propiedades siguientes:

S_1) Si PA, PB $\in \mathcal{D}$, entonces PA + PB $\in \mathcal{D}$.
S_2) (PA + PB) + PC = PA + (PB + PC).
S_3) PA + PB = PB + PA.
S_4) PP + PA = PA para todo PA $\in \mathcal{D}$.
S_5) Para cada PA existe PA', tal que PA + PA' = PP.

Es evidente que PP es el desplazamiento nulo, es decir, el punto P no se mueve, y que A' es el punto simétrico de A respecto de P.

A manera de ejercicio dejamos al lector la demostración de estas propiedades, las que son similares a las del ejemplo de las fuerzas.

Podemos también definir una operación externa r · PA entre el desplazamiento PA y un número real r. Llamaremos r · PA al desplazamiento PA', donde A' es un punto de la recta que une P y A, tal que la distancia de P a A' es r veces la distancia de P a A, tomando A' del mismo lado que A si $r > 0$ y del opuesto si $r < 0$.

Volviendo a observar que las definiciones son equivalentes a las del ejemplo anterior, deducimos la validez de las propiedades:

P_1) Si a es un número real y PA $\in \mathcal{D}$, entonces a · PA $\in \mathcal{D}$.
P_2) a · (b · PA) = (ab) · PA.
P_3) a(PA + PB) = aPA + aPB.
P_4) (a + b) PA = aPA + bPA.
P_5) 1 · Pa = Pa.

(Conviene que el lector revise las demostraciones del ejemplo de las fuerzas y las repita adaptadas a este caso.)

4. Ejemplos Algebraicos: Los Pares de Números, las n-uplas de Números

Consideremos los pares ordenados (a, b) de números reales. A este conjunto, con las operaciones que definiremos más adelante, denominaremos $\mathbb{R}^2$.

Llamamos par *ordenado* a un par de números donde distinguimos cuál es el primero, es decir, cuando consideramos diferentes los pares (a, b) y (b, a). Interesa entonces no sólo los números que intervienen en el par sino también el orden en que están escritos.

Vamos a definir en $\mathbb{R}^2$ una operación binaria *interna* (es decir, que los elementos que intervienen en la operación pertenecen al conjunto $\mathbb{R}^2$), que llamaremos *suma*, usando la fórmula

$$(a, b) + (p, q) = (a + p, b + q)$$

(Por ejemplo, la suma $(1, 2) + (5, -4) = (6, -2)$.)

De acuerdo con la definición anterior, dados dos pares (= objetos $\mathbb{R}^2$) se obtiene un nuevo par, la suma, es decir, se cumple

S_1) Si (a, b) y $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ entonces
$(a, b) + (p, q) \in \mathbb{R}^2$.

Por otra parte, *hay una ley asociativa*, es decir

$$\begin{aligned} &[(a, b) + (p, q)] + (c, d) = \\ &= (a + p, b + q) + (c, d) = \\ &= (a + p + c, b + q + d) \end{aligned}$$

Y, por otra parte,

$$\begin{aligned} &(a, b) + [(p, q) + (c, d)] = \\ &= (a, b) + (p + c, q + d) = \\ &= (a + p + c, b + q + d) \end{aligned}$$

Luego hemos demostrado

S_2) $[(a, b) + (p, q)] + (c, d) = (a, b) + [(p, q) + (c, d)]$.

Además tenemos una ley conmutativa, puesto que

$$\begin{aligned} (a, b) + (p, q) &= (a + p, b + q) = \\ &= (p + a, q + b) = (p, q) + (a, b) \end{aligned}$$

por lo tanto vale

S_3) $(a, b) + (p, q) = (p, q) + (a, b)$.

Existe, asimismo, un elemento particular de $\mathbb{R}^2$ que es el $(0, 0)$ (el par formado por dos ceros), que tiene la propiedad

S_4) $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Y, por último, para cada par (a, b) podemos tomar el par $(-a, -b)$, de modo que se cumpla:

S_5) Para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe $(-a, -b)$, tal que $(a, b) + (-a, -b) =$
$= (0, 0)$.

Podemos ahora definir una nueva operación, esta vez ***externa***, entre un número real y un par (= objeto de $\mathbb{R}^2$) mediante la fórmula

$$m \cdot (a, b) = (ma, mb)$$

cuyo resultado es, por tanto, un elemento de $\mathbb{R}^2$. Tenemos así las propiedades:

P_1) Si n es un número real y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces $m \cdot (a, b) \in \mathbb{R}^2$.
P_2) $m[r(a, b)] = (mr)(a, b)$.

En efecto, $m[r(a, b)] = m(ra, rb) = (mra, mrb)$

y

$$(mr)(a, b) = (mra, mrb).$$

P_3) $m[(a, b) + (p, q)] = m(a, b) + m(p, q)$.

Demostración:

$$m[(a, b) + (p, q)] = m(a + p, b + q) =$$
$$= (m(a + p), m(b + q)) = (ma + mp, mb + mq).$$

Por otro lado,

$$m(a, b) + m(p, q) = (ma, mb) + (mp, mq)$$
$$= (ma + mp, mb + mq).$$

P_4) $(m + n)(a, b) = m(a, b) + n(a, b)$.

Demostración:

$$(m + n)(a, b) = ((m + n)a, (m + n)b) =$$
$$= (ma + na, mb + nb)$$

$$m(a, b) + n(a, b) = (ma, mb) + (na + nb) =$$
$$= (ma + na, mb + nb).$$

P_5) $1 \cdot (a, b) = (a, b)$.

Demostración: $1 \cdot (a, b) = (1a, 1b) = (a, b)$.

Como en los ejemplos anteriores, será suficiente destacar las diez propiedades ya indicadas.

Ternas ordenadas

En forma similar al ejemplo anterior, es posible estudiar las ternas ordenadas de números en lugar de los pares. Es decir, el conjunto $\mathbb{R}^3$ de ternas (a, b, c) (que consisten de tres números reales y de su ordenación).

Podemos aquí definir, como en el caso de los pares, una operación interna que llamamos también *suma*, dada por

$$(a, b, c) + (p, q, r) = (a + p, b + q, c + r)$$

y un producto de un número por una terna definido por

$$m(a, b, c) = (ma, mb, mc)$$

Por ejemplo:

$$(3, -1, 7) + (2, 4, -3) = (5, 3, 4)$$
$$2(1, 3, -2) = (2, 6, -4).$$

Queda a cargo del lector la demostración de las propiedades:

S_1) Si (a, b, c) y $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$, entonces $(a, b, c) + (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.
S_2) $[(a, b, c) + (p, q, r)] + (x, y, z) = (a, b, c) + [(p, q, r) + (x, y, z)]$.
S_3) $(a, b, c) + (p, q, r) = (p, q, r) + (a, b, c)$.
S_4) $(a, b, c) + (0, 0, 0) = (a, b, c)$ para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
S_5) Dado (a, b, c) existe $(-a, -b, -c)$ tal que $(a, b, c) + (-a, -b, -c) = (0, 0, 0)$.

P_1) Si m es un número real y $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entonces $m(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
P_2) $m[n(a, b, c)] = (mn)(a, b, c)$.
P_3) $m[(a, b, c) + (p, q, r)] = m(a, b, c) + m(p, q, r)$.
P_4) $(m + n)(a, b, c) = m(a, b, c) + n(a, b, c)$.
P_5) $1 \cdot (a, b, c) = (a, b, c)$.

n- uplas ordenadas

Generalizando el ejemplo de los pares y de las ternas, elegimos un número natural n cualquiera y consideramos las n-uplas ordenadas, es decir: sucesiones ordenadas de n números reales. Por supuesto que, tomando n = 2, volvemos a tener los pares, y tomando n = 3 las ternas.

Para cualquier número n llamamos $\mathbb{R}^n$ al conjunto de n-uplas que escribiremos en general $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Podemos aquí también definir una suma por la ley:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

y el producto de un número real por una n-upla tomando

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ma_1, ma_2, \dots, ma_n).$$

Queda como ejercicio para el lector enunciar y demostrar propiedades similares a las $S_1), \dots, S_5)$, $P_1, \dots, P_5)$ de los dos ejemplos anteriores.

5. Otros Ejemplos: Polinomios, Funciones Continuas

Consideremos ahora el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales. Para simplificar las definiciones posteriores se supone que los polinomios se expresan por sumas infinitas $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$, donde todos los coeficientes a_i son cero a partir de un cierto lugar en adelante. Así, por ejemplo, se dirá que un polinomio tiene grado n si $a_n \neq 0$ y $a_r = 0$ para todo $r > n$.

Entonces, la suma de dos polinomios se define en la forma habitual

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots) + (b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots,$$

lo mismo que el producto por un número real haciendo

$$m(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots) = (ma_0 + ma_1X + ma_2X^2 + \dots).$$

Representemos los polinomios con las letras p, q, etc. y con $\mathcal{P}$ el conjunto de todos ellos. Se tiene entonces:

S_1) Si $p,\ q \in \mathcal{P}$, entonces $p + q \in \mathcal{P}$

es decir, la suma de dos polinomios es un polinomio.

S_2) $(p + q) + r = p + (q + r)$.

Demostración. Si
$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots, \\ q &= b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots, \\ r &= c_0 + c_1X + c_2X^2 + \ldots, \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} (p + q) + r &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2 + (a_3 + b_3) X^3 + \ldots] + \\ &+ [c_0 + c_1X + c_2X^2 + \ldots] = \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) X + (a_2 + b_2 + c_2) X^2 + \ldots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p + (q + r) &= [a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots] + \\ &+ [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) X + (b_2 + c_2) X^2 + \ldots] = \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) X + (a_2 + b_2 + c_2) X^2 + \ldots \end{aligned}$$

S_3) $p + q = q + p$.

(La demostración debe hacerse en forma similar a la anterior.)

S_4) Existe el 0 tal que $0 + p = p$ para todo $p \in \mathcal{P}$. El 0 de $\mathcal{P}$ es el polinomio

$$0 = 0 + 0X + 0X^2 + \ldots$$

y con este elemento debe demostrarse que $0 + p = p$.

S_5) Para cada $p \in \mathcal{P}$ existe p' tal que $p + p' = 0$.

Basta para esto considerar: $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$, y tomar $p' = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + \ldots$; es decir, si llamamos $p' = a_0' + a_1'X + a_2'X^2 + \ldots$, tomar $a_i' = -a_i$ para *todo* i.

Según la definición dada anteriormente, el producto de un polinomio por un número es otra vez un polinomio, es decir, se cumple:

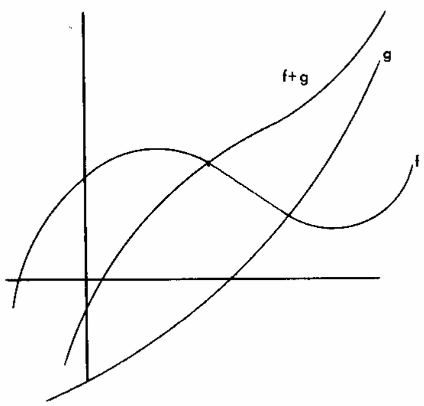
P_1) Si m es un número real y $p \in \mathcal{P}$, entonces $mp \in \mathcal{P}$.

También valen las propiedades:

P_2) $m(np) = (mn)p$ si m, n son números y p un polinomio.
P_3) $m(p + q) = mp + mq$.
P_4) $(m + n)p = mp + np$.
P_5) $1 \cdot p = p$.

La demostración de estas propiedades, que se hace en forma similar a la de S_2), se deja a cargo del lector.

Otro ejemplo importante es el de las funciones continuas (de una variable real a valores reales), donde se definen suma y producto en la forma corriente; es decir, si f y g son dos funciones, se define $f + g$ por la fórmula $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, o sea, como la función que en cada punto x vale tanto como la suma de los valores de f y de g en dicho punto. Si f es una función y m un número real, entonces mf es la función que para cada valor x de la variable vale $(mf)(x) = m \cdot f(x)$; es decir, m multiplicado por el valor $f(x)$.



En los textos elementales de análisis se demuestra que la suma de dos funciones continuas es una función continua, y lo mismo que el producto de una función continua por un número es una función continua. Esto puede expresarse (si llamamos $\mathcal{J}$ al conjunto de las funciones continuas) por

S_1) Si f y $g \in \mathcal{J}$, entonces $f + g \in \mathcal{J}$.

P_1) Si m es un número real y $f \in \mathcal{J}$, entonces $mf \in \mathcal{J}$.

Además pueden demostrarse otras propiedades importantes:

S_2) $(f + g) + h = f + (g + h)$.

Para demostrar esta igualdad habrá que verificar que las funciones $f + (g + h)$ y $(f + g) + h$ tienen los mismos valores para cada valor x de la variable, es decir,

$$
\begin{aligned}
[f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) = \\
&= f(x) + g(x) + h(x) \\
[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) = \\
&= f(x) + g(x) + h(x).
\end{aligned}
$$

S_3) $f + g = g + f$ se demuestra en forma similar.
S_4) Existe $0 \in \mathcal{J}$ tal que $0 + f = f$ para todo $f \in \mathcal{J}$. Esta $0 \in \mathcal{J}$ es la función $0(x) = 0$; es decir, la función que vale cero para todo x, o sea la función constante cero.
S_5) Para cada $f \in \mathcal{J}$ existe f' tal que $f + f' = 0$. f' es la función definida por $f'(x) = -f(x)$. (En los textos elementales de análisis se demuestra que si f es continua entonces f', también llamada $-f$, es continua.)

Respecto al producto de la función por un número son válidas también

P_2) $(mn)f = m(nf)$.
P_3) $m(f + g) = mf + mg$.
P_4) $(m + n)f = mf + nf$.
P_5) $1 \cdot f = f$,

cuya demostración se hace en forma semejante a la de S_2), es decir, verificando que para cada x el valor de las funciones que aparecen a cada lado del signo de igualdad es el mismo. Para ello no sólo hay que utilizar las definiciones de las operaciones entre funciones sino que debemos recordar que al fijar un valor de x, entonces $f(x)$, $g(x)$ son *números fijos* y no más funciones y, por consiguiente, es posible utilizar las propiedades asociativa, distributiva, etc. de los números reales.

2

ESPACIOS VECTORIALES

1. Definición de Espacio Vectorial

Los ejemplos anteriores nos sirven para poder obtener un conjunto de propiedades comunes a todos ellos. Por supuesto, todos los resultados que podamos obtener a partir de dichas propiedades serán válidos para todos los ejemplos citados, y para cualquier otro ejemplo que goce de las propiedades citadas.

Haciendo abstracción de la naturaleza de los objetos en estudio, vamos a definir ***espacio vectorial*** como un conjunto V (cuyos objetos serán designados con letras latinas mayúsculas), donde se define una operación binaria interna, que llamaremos ***suma***, y una operación externa de ***producto*** por un número real.

Los elementos de V serán llamados ***vectores*** y los números reales ***escalares***.

Imponemos como condiciones de partida o ***axiomas*** las siguientes:

S_1) Si A, B ε V, entonces A + B ε V.
S_2) (A + B) + C = A + (B + C).
S_3) A + B = B + A.
S_4) Existe 0 ε V tal que 0 + A = A para todo A.
S_5) Para cada A ε V existe A' tal que A + A' = 0.

P_1) Si a es un escalar y A ε V, entonces a $\cdot$ A ε V.
P_2) (ab) A = a (bA).
P_3) a (A + B) = aA + aB.
P_4) (a + b) A = aA + bA.
P_5) 1 $\cdot$ A = A.

Notación. El vector A' definido en S_5) se suele llamar - A, y se escribe A-B para indicar A + (- B).

Veamos ahora algunas propiedades importantes que se deducen de la lista de axiomas.

Proposición 2. 1. 1. Existe un único vector 0.

Demostración. Si 0 y 0' verifican S_4), entonces $0 + 0' = 0'$ y $0' + 0 = 0$, luego por S_3) tenemos

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0.$$

Proposición 2. 1. 2. Para cada $A \in V$ existe un único A' tal que $A + A' = 0$.

Demostración. Sean A', A'' vectores tales que $A + A' = 0$

$$A + A'' = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} A' &= 0 + A' = A' + 0 = A' + (A + A'') = \\ &= (A' + A) + A'' = 0 + A'' = A''. \end{aligned}$$

Esta proposición justifica la notación -A para A', la que se llama el *opuesto* de A.

16 **Proposición 2. 1. 3.** Si o es el número cero,

$$o \cdot A = 0$$

Demostración. $o \cdot A = (o + o) \cdot A = oA + oA$, y sumando a los miembros extremos -(oA) resulta

$$0 = oA$$

(Aquí conviene observar que debe distinguirse entre el escalar o y el vector 0.)

Proposición 2. 1. 4. Si a es un escalar,

$$(-a) A = -(aA)$$

(Aquí el signo - tiene significado diferente en cada miembro.)

Demostración. $aA + (-a) A = (a - a) A = oA = 0$, y sumando -(aA) a los miembros extremos resulta

$$\begin{aligned} -(aA) &= -(aA) + [aA + (-a) A] = \\ &= [-(aA) + aA] + (-a) A = \\ &= 0 + (-a) A = (-a)A. \end{aligned}$$

Ejercicios

Utilizando las operaciones conocidas, verificar cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:

1. El conjunto de las ternas (a, b, c) tales que $a + b + c = o$.

2. El conjunto de las ternas (a, b, c) tales que $a + b + c = 1$.

3. Los números complejos.

4. Los polinomios de grado menor o igual a 87.

2. Dependencia e Independencia Lineal

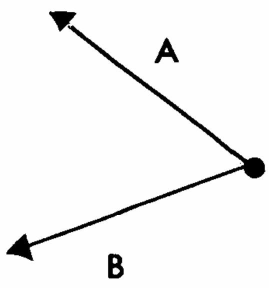
Una de las propiedades de los vectores de la que hacemos uso frecuente es la independencia lineal.

Definición. Dos vectores A y B se dicen linealmente independientes (l.i.) si $aA + bB \neq 0$ toda vez que por lo menos uno de los escalares sea diferente de cero.

En otras palabras, diremos que A y B son l.i. si $aA + bB = 0$ implica $a = b = 0$. Podemos todavía interpretar esta condición como sigue: la ecuación $xA + yB = 0$ (con incógnitas x, y) tiene como únicas soluciones $x = 0$, $y = 0$.

Ejemplo

Si V es el espacio vectorial de las fuerzas que actúan sobre un punto, sean A y B dos fuerzas no nulas que tienen distinta dirección. Buscar entonces escalares a y b, tales que $aA + bB = 0$ equivale a $aA = -bB$. Pero aA tiene siempre la dirección de A y $-bB$ la de B. Puesto que $aA = -bB$ significa que aA es la *misma fuerza* que $-bB$, ellas deben coincidir, luego la única posibilidad para ello es que $aA = 0$, $-bB = 0$ y, por lo tanto, $a = 0$, $b = 0$.



Ejercicios

1. Verificar que los polinomios x y x^2 son l.i.

2. Verificar que las funciones $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ son l.i.

3. Verificar que las funciones $f_1 = \text{sen } x$, $f_2 = \cos x$ son l.i.

4. Verificar que las funciones $f_1 = 2^x$, $f_2 = 2^{x+1}$ no son l.i.

5. Mostrar que los pares de números $(\frac{1}{2}, 8)$ y $(\frac{1}{4}, 4)$ no son l.i.

Definición. Un conjunto finito de vectores $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ se dice linealmente independiente si $a_1A_1 + \dots + a_nA_n = 0$ si, y sólo si, $a_1 = 0$, $a_2 = 0 \dots a_n = 0$.

Haciendo igual razonamiento que en el caso de dos vectores, $A_1, \dots, A_n$ son l.i. si la ecuación $x_1A_1 + \dots + x_nA_n = 0$ tiene como únicas soluciones $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Ejemplo

Las funciones x, sen x, cos x son l.i. Para ver esto debemos buscar escalares a, b, c, tales que $ax + b \text{ sen } x + c \cos x$ sea la función cero para todo valor de x. Veamos que esta condición implica que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Para ello damos valores convenientes a x y tenemos, por ejemplo, para $x = 0$, que

18

$$a \cdot 0 + b \cdot \text{sen } 0 + c \cdot \cos 0 = 0$$

es decir $c = 0$.

Si $c = 0$, nuestra función es $ax + b \cdot \text{sen } x = 0$.

Tomando $x = 2\pi$ $(\text{sen } 2\pi = 0)$ resulta

$$a \cdot 2\pi + b \cdot \text{sen } 2\pi = 0$$

luego $a \cdot 2\pi = 0$, es decir $a = 0$.

La función se reduce a

$$b \cdot \text{sen } x = 0$$

y, para $x = \pi/2$ $(\text{sen } \pi/2 = 1)$, queda $b = 0$. Es decir, hemos visto que para que $ax + b \cdot \text{sen } x + c \cdot \cos x$ sea la función cero, *necesariamente* $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; luego las funciones x, sen x y cos x son l.i.

Ejercicios

1. Sean A y B dos fuerzas cuyas direcciones son diferentes, y sea C una tercera fuerza. Mostrar que A, B, C son l.i. si, y sólo si, la dirección de C no está contenida en el plano determinado por las direcciones de A y B.

2. Sean (0, 1) y (1, 0) en el ejemplo de los pares de números. Mostrar que para todo par de números (a, b) los conjuntos (0, 1), (1, 0) y (a, b) no son l. i.

3. Mostrar que las funciones sen x, sen 2x, sen 3x, ..., sen nx son l. i.

4. Mostrar que las funciones sen x, sen 2x, sen 3x, ..., sen nx, cos x, cos 2x, ..., cos nx, son l. i.

5. Los polinomios 1, x, x^2, x^3 son l. i. Mostrar que si p es un polinomio de tercer grado el conjunto $\{1, x, x^2, x^3, p\}$ no es l. i.

Definición. Cuando un conjunto no es l. i. se llama linealmente dependiente (l. d.).

Conviene observar que la dependencia o independencia lineal no es una propiedad individual de los vectores sino una propiedad de los conjuntos de vectores.

Teorema 2.2.1. Sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto l. i. de vectores. Entonces todo subconjunto no vacío es l. i.

Demostración. Sea S un subconjunto de $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Supongamos que se ordenan los índices de modo tal que $S = \{A_1, \ldots, A_r\}$. Si S fuera l. d. existirían escalares no todos nulos tales que

$$a_1A_1 + \ldots + a_rA_r = 0$$

luego, tomando

$$a_{r+1} = 0, \ldots, a_n = 0$$

resulta

$$a_1A_1 + \ldots + a_rA_r + 0 \cdot A_{r+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = 0$$

con los a_i no todos cero, contradiciendo la hipótesis de que el conjunto total era l. i.

Observación. Del hecho que todos los subconjuntos propios (es decir, diferentes del total) de un conjunto finito de vectores sean l. i. no se deduce que el conjunto total sea l. i. En efecto, si se consideran, por ejemplo, los vectores (0, 1), (1, 0) y (2, 3) (en el espacio vectorial de los pares de números) se vé que {(0, 1), (1, 0)}, {(0, 1), (2, 3)} y {(1, 0), (2, 3)} son l. i., mientras que {(0, 1), (1, 0), (2, 3)} no lo es.

Otro ejemplo podría ser el de tres fuerzas no nulas con direcciones diferentes, pero las tres en un mismo plano. El ejemplo de la página 17 y el ejercicio 1 de la página 18 muestran que estos vectores son l.i. dos a dos, pero los tres forman un conjunto l. d.

Teorema 2.2.2. Un conjunto formado por un solo vector A es l.i. si, y sólo si, $A \neq 0$.

Demostración. Sea $A \neq 0$. Si $aA = 0$ con $a \neq 0$, como a es un número real, $a \neq 0$ implica que existe el número real $1/a$ luego $(1/a)(aA) = (1/a) \cdot 0 = 0$, pero $(1/a)(aA) = ((1/a)a)(A) = 1 \cdot A = A$, por lo tanto $A = 0$, contradiciendo la hipótesis. Luego si $A \neq 0$, entonces $\{A\}$ es l.i.

Si $A = 0$, para todo a (por ejemplo, $a = 1$), $aA = 0$ con $a \neq 0$; por lo tanto $\{A\}$ es l. d.

3. Dependencia e Independencia Lineal (cont.)

20

En lo que antecede hemos definido la independencia lineal de conjuntos finitos.

Cuando queremos definir estos mismos conceptos para conjuntos infinitos, nos encontramos que no estamos autorizados a hablar de sumas infinitas y, por lo tanto, una definición como la que se ha dado en la sección anterior no tiene sentido. Podemos, sin embargo, utilizar la siguiente:

Definición. Un conjunto cualquiera de vectores se dice l.i. si todo subconjunto finito es l.i. (en el sentido anteriormente definido).

El teorema de la sección anterior nos dice que esta definición no contradice a la otra. En particular, si el conjunto es finito, el conjunto total también es uno de los subconjuntos a considerar.

Ejemplo

En el espacio vectorial de las funciones continuas, las funciones $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ forman un conjunto infinito l.i. Para ello basta comprobar que, para cada n, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es l.i. En efecto, si

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

(es decir, la función que vale cero en todos los puntos), entonces tomando el valor de la función en los puntos $0, 1, \ldots,$ n resulta

$$
\begin{array}{l}
a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0 \\
a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = 0 \\
a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_n \cdot 2^n = 0 \\
\quad \ldots \qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\
a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot n + \ldots + a_n \cdot n^n = 0
\end{array}
$$

y este sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas (las incógnitas serían $a_0, \ldots, a_n$) tiene como únicas soluciones $a_0 = 0, \ldots, a_n = 0$, puesto que el determinante es diferente de cero.

Ejercicios

1. Verificar que las funciones sen x, sen 2x, ..., sen nx, ... forman un conjunto infinito l. i.

2. En la demostración del ejemplo anterior se dice "basta demostrar que, para cada n, $\{1, x, \ldots, x^n\}$ es l. i.". ¿Por qué? (Eso no es exactamente lo que dice la definición, el lector debe usar el teorema de la sección anterior.)

4. Bases y Dimensión

Teorema 2.4.1. Si $\{A, B\}$ es un conjunto l. d. y si $A \neq 0$, entonces B es múltiplo de A.

Demostración. Si $\{A, B\}$ es l. d., existen a y b, ambos no cero, tales que $aA + bB = 0$. Pero b no puede ser cero, porque si lo fuera tendría que ser $a \neq 0$ y $aA = 0$, lo que es contrario a la hipótesis $A \neq 0$.

Si $b \neq 0$, existe el escalar $1/b$, luego $B = [(-1/b) \cdot a]\ A$; es decir, B es múltiplo de A.

Definición. Dados dos vectores A_1 y A_2, diremos que un vector B es *combinación lineal* de A_1 y A_2 si existen escalares b_1 y b_2, tales que $B = b_1A_1 + b_2A_2$.

Ejercicio

Demostrar que un par (x, y) es combinación lineal de los pares (0, 1) y (1, 0).

Teorema 2.4.2. Si $\{A, B, C\}$ es un conjunto l. d. y si $\{A, B\}$ es l. i., entonces C es combinación lineal de A y B.

Demostración. Como $\{A, B, C\}$ es l. d., existen escalares a, b y c, no todos cero, tales que

$$aA + bB + cC = 0$$

Si c fuera cero, entonces a o b no podrían serlo, y la ecuación se reduciría a $aA + bB = 0$, contradiciendo el hecho de que $\{A, B\}$ es l. i.

Luego, $c \neq 0$. Por lo tanto, existe el escalar $1/c$ y de la condición anterior resulta

$$C = (-1/c)(aA + bB)$$

y llamando $c_1 = (-1/c) \cdot a$ y $c_2 = (-1/c) \cdot b$, tenemos $C = c_1A + c_2B$, como queríamos demostrar.

Definición. Dado un conjunto finito de vectores $\{A_1, \ldots, A_n\}$, diremos que un vector B es *combinación lineal* de $A_1, \ldots, A_n$ si existen escalares $b_1, \ldots, b_n$ tales que

$$B = b_1A_1 + \ldots + b_nA_n$$

Teorema 2.4.3. Si $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es l.i. y si $\{A_1, \ldots, A_r, B\}$ es l. d., entonces B es combinación lineal de $A_1, \ldots, A_r$.

Demostración. De la segunda condición se deduce que existen escalares no todos nulos tales que

$$a_1A_1 + \ldots + a_rA_r + bB = 0$$

y, puesto que $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es l.i., entonces $b \neq 0$ (como ejercicio, demuestre el lector esta afirmación), luego existe $1/b$ y llamando $b_i = (-1/b) \cdot a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ resulta

$$B = b_1A_1 + \ldots + b_rA_r$$

Corolario. Si $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es l.i. y si B no es combinación lineal de $A_1, \ldots, A_r$, entonces $\{A_1, \ldots, A_r, B\}$ es l.i.

La demostración queda como ejercicio para el lector.

Definición. Un conjunto $\{A_\alpha\}$ de vectores de un espacio vectorial V (donde α recorre un conjunto cualquiera de índices) se dice un ***conjunto de generadores*** si, para todo $B \in V$, existe un número finito de vectores, sean $A_1, \ldots, A_s$, en $\{A_\alpha\}$ tales que B es combinación lineal de $A_1, \ldots, A_s$.

Ejemplos

1. Si V es un espacio vectorial y $\{A_\alpha\}$ es el conjunto de todos los vectores de V, entonces $\{A_\alpha\}$ es un conjunto de generadores.

2. En el espacio vectorial de los pares de números, $\{(0, 1), (1, 0)\}$ es un conjunto de generadores.

3. En el espacio vectorial de los polinomios, el conjunto formado por los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es un conjunto de generadores.

Ejercicios

Encontrar conjuntos de generadores, que no sean todos los vectores del espacio, en los siguientes ejemplos:

1. las fuerzas que actúan en un punto,

2. las ternas de números,

3. las n-uplas de números.

Definición. Un espacio vectorial V se dice de *dimensión finita* si existe un conjunto finito de generadores.

Ejemplo

El espacio vectorial de los pares de números (véase el ejemplo 2 anterior) tiene un conjunto de generadores de dos elementos.

Ejercicios

1. Verificar que son espacios de dimensión finita:

   a) las fuerzas que actúan sobre un punto,

   b) los desplazamientos de un punto,

   c) las n-uplas de números.

2. Mostrar que el espacio de todos los polinomios *no es* de dimensión finita.

Teorema 2.4.4. Sea $\{A_1, \ldots, A_r\}$ un conjunto finito de generadores de un espacio vectorial V y sea $\{B_1, \ldots, B_s\}$ un conjunto l.i. Entonces $s \leq r$.

Demostración. Veamos que todo conjunto de más de r vectores es l. d.

Sea $\{C_1, \ldots, C_k\}$ $k > r$ un conjunto cualquiera de vectores. Como los vectores $\{A_1, \ldots, A_r\}$ forman un conjunto de generadores, tenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1r}A_r \\ C_2 &= a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + \ldots + a_{2r}A_r \\ &\ \ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\ C_k &= a_{k1}A_1 + a_{k2}A_2 + \ldots + a_{kr}A_r \end{aligned}$$

que se puede escribir

$$C_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}A_j \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Queremos mostrar que existen escalares $c_1, \ldots, c_k$ no todos nulos, tales que $c_1C_1 + \ldots + c_kC_k = 0$.

Para ello consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_ka_{k1} &= o \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\quad \ldots & \\ x_1a_{1r} + x_2a_{2r} + \ldots + x_ka_{kr} &= o \end{aligned}$$

que tiene r ecuaciones y k incógnitas. Como $k > r$, este sistema tiene soluciones no nulas que podemos llamar $c_1, \ldots, c_k$. (Escrito en forma condensada, tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} c_ia_{ij} = o, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, r)$$

Entonces

$$\sum_i c_iC_i = \sum_i c_i \left(\sum_j a_{ij}A_j\right) = \sum_j \left(\sum_i c_ia_{ij}\right) A_j$$

y, como cada coeficiente

$$\sum_i c_ia_{ij} = o,$$

resulta $c_1C_1 + \ldots + c_kC_k = 0$ con los c_i no todos nulos.

Definición. Un conjunto de vectores de un espacio V se dice una *base* si es l.i. y además es un conjunto de generadores.

Ejemplos

1. En el espacio de los pares de números el conjunto $\{(0, 1), (1, 0)\}$ es una base.

2. En el espacio de los polinomios, el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es una base.

Ejercicios

Buscar bases de los siguientes espacios vectoriales:

1. las fuerzas que actúan sobre un punto,

2. los desplazamientos de un punto,

3. las ternas de números (x, y, z),

4. las n-uplas de números.

Teorema 2.4.5. Sea V un espacio de dimensión finita y sea $\{V_1, \ldots, V_s\}$ l.i. Entonces existen vectores $V_{s+1}, \ldots, V_n$ tales que $\{V_1, \ldots, V_s, V_{s+1}, \ldots, V_n\}$ es una base.

Este teorema se suele enunciar diciendo que todo conjunto l.i. se puede completar hasta formar una base.

Demostración. Supongamos que tenemos $\{V_1, \ldots, V_s\}$ l.i. Si $\{V_1, \ldots, V_s\}$ es un conjunto de generadores, entonces es una base y el teorema queda verificado.

Si $\{V_1, \ldots, V_s\}$ no es un conjunto de generadores, entonces existe un vector V_{s+1} que no es combinación lineal de $V_1, \ldots, V_s$.

Por el teorema 2.4.3, el conjunto $\{V_1, \ldots, V_s, V_{s+1}\}$ es l.i. (En efecto, si fuera l.d., como $\{V_1, \ldots, V_s\}$ es l.i., resultaría V_{s+1} combinación lineal de $V_1, \ldots, V_s$, contrariamente a la forma que hemos elegido V_{s+1}.)

Si $\{V_1, \ldots, V_s, V_{s+1}\}$, que es l.i., fuera también un conjunto de generadores, la demostración habría terminado. Si no lo fuera, repitiendo el razonamiento, existiría un vector V_{s+2} tal que

$$\{V_1, \ldots, V_s, V_{s+1}, V_{s+2}\} \text{ es l.i.}$$

y así sucesivamente podemos seguir agregando vectores en forma tal que

a) el conjunto obtenido es l. i.,

b) si no es un conjunto de generadores, se podría agregar otro vector más.

Por definición de dimensión finita, existe un conjunto finito de r generadores, y por el teorema 2. 4. 4, si un conjunto es l. i., no puede tener más de r elementos.

Esto implica que nuestro proceso debe terminar antes de superar el número r (puede terminar antes del r). Por la condición b), este proceso termina únicamente si el conjunto obtenido es un conjunto de generadores; pero, como por a) es l. i., quiere decir que este proceso sirve para obtener una base.

Corolario. Si V es un espacio no nulo de dimensión finita, entonces V tiene base.

Demostración. Si V no es nulo, existe un vector $V_1 \neq 0$. Como $\{V_1\}$ es l. i., aplicamos el teorema.

Ejercicios

1. Verificar que en el espacio de los pares de números, los vectores (1, 2) y (2, 0) forman una base.

2. En el espacio de las fuerzas, si F_1 y F_2 son dos fuerzas que tienen diferente dirección, entonces F_1, F_2 es l.i. Completar este conjunto hasta formar una base.

3. En el espacio de las ternas de números (1, 2, 3), (2, 0, 1) son l. i. Completar este conjunto hasta formar una base.

4. Calcular cuatro bases diferentes del espacio de las 5-uplas de números.

Teorema 2. 4. 6. Si dos conjuntos $\{A_1, \ldots, A_r\}$ y $\{B_1, \ldots, B_s\}$ son bases de un espacio, entonces $r = s$.

Demostración. Como $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es una base, es en particular un conjunto l. i. Como $\{B_1, \ldots, B_s\}$ es una base, es en particular un conjunto de generadores. Entonces el teorema 2.4.4 dice que $r \leq s$.

Repitiendo el mismo razonamiento, pero observando ahora $\{B_1, \ldots, B_s\}$ como conjunto l.i. y $\{A_1, \ldots, A_r\}$ como conjunto de generadores, resulta $s \leq r$.

De las dos desigualdades se deduce $r = s$.

Este teorema justifica la siguiente definición:

Definición. Un espacio vectorial V se dice *de dimensión* r si tiene una base de r vectores. Se escribe $\dim(V) = r$.

Ejercicio

Calcular las dimensiones de los espacios estudiados en el ejercicio anterior.

Corolario. Si V es un espacio de dimensión r, todo conjunto l.i. de r vectores es una base.

En efecto, $\dim(V) = r$ significa que existe una base de r vectores. Si $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es l.i. podemos ampliarlo, por el teorema 2.4.5, hasta tener una base. Pero, como toda base debe tener r elementos, no ha habido necesidad de agregar ningún vector, luego $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es una base.

5. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 (por ejemplo, los desplazamientos que puede sufrir un punto que se mantiene en un plano fijo) y sea $\{V_1, V_2\}$ una base. Entonces, si A es un vector cualquiera de V, como $\{V_1, V_2\}$ es un conjunto de generadores, existen escalares a_1, a_2 tales que $A = a_1V_1 + a_2V_2$ (es decir, A es combinación lineal de V_1 y V_2).

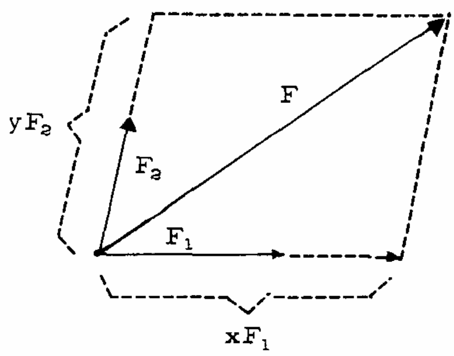
Si además tuviésemos $A = b_1V_1 + b_2V_2$, restando ambas expresiones tendríamos

$$(a_1 - b_1)\, V_1 + (a_2 - b_2)\, V_2 = 0$$

pero como $\{V_1, V_2\}$ son l.i. por ser una base, entonces $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, es decir $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Esto nos dice que, una vez fijada la base, existen escalares únicos a_1, a_2 tales que $A = a_1V_1 + a_2V_2$.

Si consideramos la base *ordenada*, entonces obtenemos un único par *ordenado* de escalares (a_1, a_2) para cada vector A, que se llama *coordenadas* de A respecto a la base ordenada dada. Dicha base se llamará *base de referencia.* Por ejemplo, el conjunto $\{F_1, F_2\}$ indicado en el dibujo forma una base del espacio vectorial de las fuerzas que actúan sobre un punto, manteniendo sus direcciones en un plano.



Llamemos $V_1 = F_1$, $V_2 = F_2$. Entonces, para toda fuerza F resulta

$$F = xF_1 + yF_2$$

(esta combinación se obtiene descomponiendo F según las direcciones de F_1 y F_2, y calculando cada componente como múltiplo de la correspondiente F_i), y de esta expresión obtenemos

$$F = xV_1 + yV_2$$

y las coordenadas de F respecto a la base *ordenada* (V_1, V_2) es el par (x, y).

Las coordenadas de un vector dependen, evidentemente, de la base y del *orden* en que se han tomado los vectores de base.

Si se hubiera tomado $V_1 = F_2$, $V_2 = F_1$, entonces se tendría

$$F = yV_1 + xV_2$$

y las coordenadas serían (y, x) (que respecto a la ordenación anterior hubieran sido las del vector $F' = yF_1 + xF_2$).

Podríamos todavía considerar otra base ordenada, por ejemplo

$$V_1 = 2F_1 + F_2, \quad V_2 = 3F_1 + 2F_2$$

en cuyo caso la fuerza F, que estabamos estudiando, resulta

$$F = x(2V_1 - V_2) + y(2V_2 - 3V_1) \quad \text{(verifíquese)}$$

es decir

$$F = (2x - 3y)\, V_1 + (2y - x)\, V_2$$

y las coordenadas de F serían ahora $(2x - 3y, 2y - x)$.

El problema del cambio de base es útil en el cálculo de transformaciones, y la forma en que cambian las coordenadas de un vector al cambiar la base será objeto de estudio en el capítulo siguiente.

Ejercicio

Calcular las coordenadas de un vector (a, b) (en el ejemplo de los pares de números) respecto a las siguientes bases:

$$\begin{array}{rll} \text{i)} & V_1 = (0,\ 1) & V_2 = (1,\ 1) \\ \text{ii)} & V_1 = (0,\ 3) & V_2 = (\tfrac{1}{2},\ 0) \\ \text{iii)} & V_1 = (1,\ 2) & V_2 = (1,\ 1) \\ \text{iv)} & V_1 = (3,\ 5) & V_2 = (-1, 2) \end{array}$$

Hasta aquí hemos visto que en un espacio vectorial de dimensión 2, una vez fijada ***una base ordenada,*** a cada vector corresponde un único par ordenado de coordenadas (y, recíprocamente, a cada par ordenado (a, b) de coordenadas corresponde el vector $aV_1 + bV_2$).

Queremos ver ahora cómo se reflejan en los pares de coordenadas las operaciones del espacio vectorial considerado.

Si $A = a_1V_1 + a_2V_2$ y $B = b_1V_1 + b_2V_2$ son dos vectores, sus pares de coordenadas son (a_1, a_2) y (b_1, b_2), respectivamente.

Entonces, el vector $A + B$ resulta

$$A + B = (a_1 + b_1)\,V_1 + (a_2 + b_2)\,V_2$$

es decir, sus coordenadas son $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$, y para cada escalar c tenemos

$$cA = c \cdot a_1 \cdot V_1 + c \cdot a_2 \cdot V_2$$

que tiene por coordenadas $(c\,a_1,\ c\,a_2)$.

En esta forma, si se conocen las coordenadas de un conjunto de vectores, todas referidas a una misma base ordenada, es posible calcular las coordenadas del resultado de cualquier operación, siempre referidas a la misma base.

Es muy importante no olvidar que para operar con coordenadas debe mantenerse fija la base ordenada de referencia.

Ejercicios

Sean los vectores A, B, C, cuyas coordenadas respecto a una base dada son, respectivamente, $(2, \frac{1}{2})$, $(-1, 7)$, $(3, -2)$. Calcular las coordenadas de los vectores:

$$2A - 5B$$
$$A + (\tfrac{1}{2})B - 3C$$
$$-A + 2B + (\tfrac{1}{3})C$$

Consideremos nuevamente una base ordenada (V_1, V_2) de referencia y dos vectores arbitrarios A, B de coordenadas (a_1, a_2) y (b_1, b_2), respectivamente. ¿Qué condiciones deben cumplir las coordenadas para que A y B sean l. i. ?

Establezcamos entonces la ecuación vectorial

$$xA + yB = 0 \qquad [1]$$

Escribiendo A y B en función de la base de referencia tenemos

$$A = a_1V_1 + a_2V_2, \quad B = b_1V_1 + b_2V_2$$

y la ecuación resulta

$$x(a_1V_1 + a_2V_2) + y(b_1V_1 + b_2V_2) = 0 \qquad [2]$$

o bien

$$(xa_1 + yb_1)V_1 + (xa_2 + yb_2)V_2 = 0 \qquad [3]$$

Las soluciones de la ecuación [1] son las mismas de la [2] y de la [3], pero, como V_1 y V_2 son l.i. por formar una base, las únicas soluciones de [3] son tales que

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 &= 0 \\ xa_2 + yb_2 &= 0 \end{aligned} \qquad [4]$$

es decir, los valores de x e y que satisfacen [1] son *los mismos* que satisfacen el sistema de ecuaciones [4] (ahora un sistema de ecuaciones entre números reales), y se sabe que este sistema tiene soluciones no todas nulas si, y sólo si, el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

En síntesis, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. Dados dos vectores A y B en un espacio de dimensión 2, si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son sus coordenadas respecto a una base de referencia, $\{A, B\}$ es l.i. si, y sólo si, el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Pasemos ahora al caso general. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (e.v.d.f.) y $\{V_1, \ldots, V_n\}$ una base de V. Entonces, si $A \in V$, como $\{V_1, \ldots V_n\}$ es un conjunto de generadores, A debe ser una combinación lineal de $V_1, \ldots, V_n$, es decir, deben existir escalares $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$A = a_1V_1 + \ldots + a_nV_n$$

Si, por otra parte, se tiene también

$$A = b_1V_1 + \ldots + b_nV_n$$

resultaría, por diferencia,

$$0 = (a_1 - b_1)V_1 + \ldots + (a_n - b_n)V_n$$

y como $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es l.i. por ser una base, entonces

$$a_1 - b_1 = o, \ldots, a_n - b_n = o$$

es decir

$$a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$$

De aquí se infiere que, una vez dado el vector A y la base *ordenada* $V_1, \ldots, V_n$, existe un único conjunto *ordenado* de escalares $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que

$$A = a_1V_1 + \ldots + a_nV_n$$

El conjunto *ordenado* $(a_1, \ldots, a_n)$ se llama *conjunto de coordenadas* de A respecto a la base *ordenada* $(V_1, \ldots, V_n)$.

Al número que ocupa el lugar i llamaremos *coordenada i-ésima* de A.

Ejemplo

Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3. Entonces los polinomios $\{1, X, X^2, X^3\}$ forman una base que se considera en el orden en el que allí figura.

Si consideramos un polinomio $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, sus coordenadas respecto a la base de referencia fijada serán (a_0, a_1, a_2, a_3). Es claro que el orden en el que figuran los coeficientes no puede alterarse, ya que, por ejemplo (a_1, a_0, a_2, a_3) son las coordenadas de $Q = a_1 + a_0X + a_2X^2 + a_3X^3$ y $P \neq Q$.

Esto trae por consecuencia que el orden en que se escribe la base tampoco puede alterarse. (El lector podrá verificar la diferencia en las coordenadas de P, si toma como base ordenada $(X^3, X^2, X, 1)$.)

Es posible, sin embargo, usar cualquier otra base. En las aplicaciones que veremos más adelante advertiremos la utilidad de usar otras bases en este ejemplo de los polinomios de grado acotado.

Ejercicio

Verificar que en el espacio de las ternas de números los vectores $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_2 = (2, 3, -1)$ y $V_3 = (3, 3, 2)$ forman una base. Calcular las coordenadas del vector $A = (-2, \frac{1}{2}, 5)$.

Supongamos ahora que V es un espacio de dimensión n y sea $(V_1, \ldots, V_n)$ una base ordenada.

Como a cada vector A corresponde un único conjunto ordenado de coordenadas y a cada conjunto ordenado de n escalares (sean $(c_1, \ldots, c_n)$) corresponde un único vector C (tomando $C = c_1V_1 + \ldots + c_nV_n$), veamos cómo se reflejan las operaciones de V en los conjuntos de coordenadas.

Si A tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ y B tiene $(b_1, \ldots, b_n)$ resulta

$$A = a_1V_1 + \ldots + a_nV_n$$
$$B = b_1V_1 + \ldots + b_nV_n$$

luego

$$A + B = (a_1 + b_1)V_1 + \ldots + (a_n + b_n)V_n$$

y para todo escalar c

$$cA = ca_1V_1 + \ldots + ca_nV_n$$

es decir, la suma de dos vectores A y B tiene por coordenadas i-ésimas la suma de las coordenadas i-ésimas de los vectores sumandos.

El producto de un vector A por un escalar tiene por coordenada i-ésima al producto de la coordenada i-ésima del vector A por el escalar.

Teorema 2.5.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $(V_1, \ldots, V_n)$ una base ordenada de referencia. Sea $\{A_1, \ldots, A_k\}$ un conjunto finito de vectores, y para cada índice i $(1 \leq i \leq k)$ las coordenadas de A_i sean $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Entonces, el conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es l.i. si, y sólo si, la matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{kn} \end{Vmatrix}$$

tiene rango k.

Obsérvese que esta matriz tiene por columnas las coordenadas de cada uno de los vectores.

Demostración. Puesto que A_i tiene coordenadas $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ resulta

$$A_i = a_{i1}V_1 + \ldots + a_{in}V_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}V_j$$

Establezcamos, como en el caso de dimensión 2, la ecuación vectorial

$$x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$$

o sea

$$\sum_i x_iA_i = 0 \qquad [1]$$

Reemplazando cada A_i por su valor tenemos

$$\sum_i x_i(\sum_j a_{ij}V_j) = 0 \qquad [2]$$

o bien

$$\sum_j (\sum_i x_ia_{ij})V_j = 0 \qquad [3]$$

Y, como en el caso antes estudiado, las ecuaciones [1], [2], [3] tienen las mismas soluciones. Pero $\{V_1, \ldots, V_n\}$, siendo una base, es l.i., luego [3] se cumple si, y sólo si, cada coeficiente

$\sum_i x_i a_{ij}$ es cero, es decir, [3] es equivalente al sistema

$$\sum_i x_i a_{ij} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

que puede escribirse en forma explícita

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_k a_{k1} &= 0 \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_k a_{k2} &= 0 \\ \ldots \qquad\qquad & \ldots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_k a_{kn} &= 0 \end{aligned} \qquad [4]$$

Ahora bien, el conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es l.i. si, y sólo si, la ecuación [1] tiene como únicas soluciones todas ceros, y por ser equivalente al [4], si, y sólo si, el sistema [4] tiene como únicas soluciones ceros, y ésto, a su vez, es equivalente, por un resultado elemental de álgebra, a que la matriz de los coeficientes tenga rango k (es decir, que existan k filas tales que el determinante de $k \times k$ que ellas forman sea diferente de cero).

6. Subespacios

Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas, y sea S el subconjunto de V formado por las funciones que valen 0 para $x = a$. $S = \{f \in V; f(a) = 0\}$. Como la suma de dos funciones se define punto a punto, entonces si $f, g \in S$, también $f + g \in S$, $-f \in S$ y $cf \in S$ para todo escalar c. Es éste un ejemplo de un subconjunto S de un espacio vectorial V tal que, con las operaciones ya definidas en V, S es un espacio vectorial (queda a cargo del lector verificar todos los axiomas de la sección 1).

Otro ejemplo: Sea V el espacio de todos los polinomios de grado ≤ 3, y sea S el conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 2. Entonces S, con las operaciones definidas en V, es un espacio vectorial (verifíquese).

Estos ejemplos muestran que, dentro de un espacio vectorial V, pueden existir subconjuntos S que, con las operaciones definidas en V, pero haciendo caso omiso de los vectores que no están en S, S es un espacio vectorial.

Definición. Si V es un espacio vectorial, un subconjunto no vacío $S \subsetneq V$ se llama un ***subespacio*** si S, con las operaciones definidas en V, es un espacio vectorial.

Esto significa que S debe verificar los axiomas de la sección 1. (Si A, B ε S entonces A + B ε S, etc.)

Ejercicios

Si V es un espacio vectorial, verificar que los siguientes subconjuntos son subespacios:

i) $\{0\}$ (es decir, el conjunto que sólo contiene el vector cero);
ii) V;
iii) el conjunto de todos los múltiplos de un vector no nulo A;
iv) el conjunto de todas las combinaciones lineales de tres vectores A, B y C.

Es muy importante saber determinar cuándo un subconjunto S de un espacio V es un subespacio. Evidentemente, de acuerdo con la definición, S debe satisfacer las condiciones de espacio vectorial estudiadas en la sección 1; pero, por el hecho de ser S una parte de V y las operaciones de S las mismas de V, hay propiedades "universales" que, cumpliéndose para todos los vectores de V, deben cumplirse en particular para todos los vectores de S. Ellas son:

G_2) Para todo A, B, C ε S, vale

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

G_5) Para todo A, B ε S, vale

$$A + B = B + A$$

V_2) Para todo A ε S, a, b escalares,

$$(ab)\,A = a\,(bA)$$

V_3) Si A, B ε S y a es escalar, entonces

$$a\,(A + B) = aA + aB$$

V_4) Si a, b son escalares y A ε S, entonces

$$(a + b)\,A = aA + bA$$

V_5) $1 \cdot A = A$ para todo A ε S (1 es el escalar 1).

Por lo tanto, no hay necesidad de verificar que se cumplen en S, puesto que esto es consecuencia de cumplirse en V.

Restaría entonces verificar las cuatro propiedades siguientes:

G_1) Para todo $A, B \in S$, resulta $A + B \in S$.

G_3) Existe $0' \in S$, tal que $A + 0' = 0' + A = A$ para todo $A \in S$.

G_4) Para cada $A \in S$ existe A', tal que

$$A + A' = A' + A = 0'$$

V_1) Si $A \in S$ y a es un escalar, entonces $aA \in S$.

Veamos, en primer lugar, que necesariamente $0' = 0$ (el cero de V, luego para todo subespacio $S \subseteq V$, 0 debe pertenecer a S) y $A' = -A$ (es decir, el opuesto en S debe coincidir con el opuesto en V).

Sea $X \in S$, entonces

$$X + 0' = X$$

pero como las operaciones de S son las mismas de V, podemos interpretar esta suma como realizada en V, donde además tenemos $-X$ con la propiedad $(-X) + X = 0$. Sumando $-X$ a ambos miembros resulta

$$\begin{aligned} (-X) + (X + 0') &= (-X) + X = 0 \\ (-X + X) + 0' &= 0 \\ 0 + 0' &= 0 \end{aligned}$$

y para G_3 (en V $A + 0 = A$ para todo A):

$$0' = 0.$$

Ahora tenemos que $A + A' = 0' = 0$ es también una suma en V, donde $A + (-A) = 0$, luego, sumando (en V) $-A$, tenemos

$$\begin{aligned} -A + A + A' &= 0 + (-A) \\ (-A + A) + A' &= -A \\ 0 + A' &= -A \\ A' &= -A \end{aligned}$$

Entonces, para $S \subseteq V$, las propiedades G_3 y G_4 que debe satisfacer S para ser subespacio se reducen a:

G_3') $0 \in S$.
G_4') Si $A \in S$, entonces $-A \in S$.

En síntesis, para que $S \subseteq V$ sea un subespacio es necesario y suficiente que verifique G_1, G'_3, G'_4, V_1.

Teorema 2.6.1. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) S') Para todo par $A, B \in S$, a, b escalares, $aA + bB \in S$.

2) S_1) Para todo par $A, B \in S$, se tiene $A - B \in S$.
S_2) Si $A \in S$, a escalar, entonces $aA \in S$.

3) S es un subespacio de V.

Demostración. Para demostrar la equivalencia de estas propiedades veamos que $1) \Rightarrow 2)$, $2) \Rightarrow 3)$, $3) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Supongamos que S verifica 1). Si $A, B \in S$, tomando $a = 1$, $b = -1$ resulta (usando S') que $A - B \in S$, luego se verifica S_1.

Si $A \in S$, a escalar, tomando $B = A$, $b = o$ tenemos (usando S') que $aA \in S$, lo que verifica S_2.

$2) \Rightarrow 3)$. Supongamos que S cumple S_1 y S_2. Para ver que es un subespacio debemos verificar G_1, G'_3, G'_4, V_1.

G'_3) Como S no es vacío, existe $A \in S$. Tomando el par A, A, por S_1 resulta $A - A = 0 \in S$.

G'_4) Si $A \in S$, como ya sabemos que $0 \in S$, tomamos el par $0, A$. Luego por S_1 tenemos $0 - A = -A \in S$.

G_1) Si $A, B \in S$ entonces por G'_4) $-B \in S$. Considerando el par $A, -B$ obtenemos $A - (-B) = A + B \in S$.

V_1) es el mismo S_2.

$3) \Rightarrow 1)$. Supongamos que S es un subespacio. Si $A, B \in S$, a, b escalares, entonces aA y $bB \in S$ por V_1. Entonces, $aA + + bB \in S$ por G_1.

Dimensión

Lema. Sea S un subespacio de V y $A_1, \ldots, A_r$ vectores de S. Entonces $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es l.i. en S si, y sólo si, es l.i. en V.

El resultado es evidente puesto que las operaciones de S son las mismas de V y el cero de S es el mismo de V, luego la existencia o no de escalares no nulos tales que $\sum a_i A_i = 0$ es independiente del hecho de considerarse en S o en V.

Como S es un espacio vectorial, se tiene definida la dimensión de S.

Teorema 2.6.2. Si V es un espacio de dimensión n y S es un subespacio, entonces

i) S tiene dimensión finita.
ii) dim S $\leq$ dim V.
iii) dim S = dim V si, y sólo si, S = V.

Demostración. Si $\{A_1, \ldots, A_r\}$ es un conjunto l.i. en S, entonces es l.i. en V, luego (véase el teorema 2.4.4) resulta $r \leq n$ (porque V tiene una base --luego un conjunto de generadores-- de n vectores).

Sea $\{B_1, \ldots, B_s\}$ un conjunto l.i. en S que sea máximo en el sentido que para todo $C \in S$, $\{B_1, \ldots, B_s, C\}$ es l.d. Entonces $\{B_1, \ldots, B_s\}$ es una base de S y dim S = s.

Esto siempre se puede encontrar puesto que todo conjunto l.i. en S debe tener no más de n elementos.

Entonces $s \leq n$, es decir dim S $\leq$ dim V.

Esto verifica i) e ii).

Para verificar iii) tenemos, evidentemente, que si S = V, entonces dim S = dim V.

Si dim S = dim V, entonces existe una base de S compuesta de n vectores, sean $B_1, \ldots, B_n$.

Pero n vectores l.i. en V forman una base de V, luego, para todo $X \in V$, $X = x_1B_1 + \ldots + x_nB_n$ y como $B_1, \ldots, B_n$ pertenece a S, por aplicaciones reiteradas de S') tenemos $X \in S$.

Luego $V \subseteq S$ y, como por hipótesis $S \subseteq V$, resulta S = V.

Ejercicios

1. Sea V el espacio de todas las fuerzas que actúan en un punto. Sean F_1, F_2 dos fuerzas que tienen distinta dirección. Verificar

que el conjunto de todas las combinaciones lineales $xF_1 + yF_2$ es un subespacio S. Calcular la dimensión.

2. Calcular las dimensiones de los subespacios de los ejercicios iii) y iv) de la página 35.

Observaciones. Todo espacio V de dimensión n tiene un solo subespacio de dimensión n (que es el mismo V) y un solo subespacio de dimensión cero (que es el subconjunto formado por el vector cero solamente).

Si V tiene, por ejemplo, dimensión 2, entonces los únicos subespacios que contiene (además de los dos antes citados) son de dimensión 1.

Corolario. Sean S_1, S_2 subespacios de V.

i) Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces $\dim S_1 \leq \dim S_2$.
ii) Si $S_1 \subseteq S_2$ y $\dim S_1 = \dim S_2$, entonces $S_1 = S_2$.

Si S_1, S_2 son subespacios de V y si $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_1 es subespacio de S_2 (ya que S_2 es un espacio vectorial). Entonces i) y ii) resultan, respectivamente, de las afirmaciones ii) y iii) del teorema anterior.

7. Operaciones con Subespacios

Teorema 2.7.1. Sea V un espacio vectorial y S_1, S_2 dos subespacios. Entonces $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de V.

Demostración. Para verificar que la intersección $S_1 \cap S_2$ es un subespacio debe cumplir la condición S') del teorema 2.6.1.

Si A, B $\in S_1 \cap S_2$, a, b escalares, entonces, en particular, A, B $\in S_1$, y como S_1 es un subespacio tenemos $aA + bB \in S_1$. Pero también A, B $\in S_2$, y por la misma razón $aA + bB \in S_2$, luego $aA + bB \in S_1 \cap S_2$.

Teorema 2.7.2. Sea V un espacio vectorial y $\{S_\alpha\}$ (α recorriendo un conjunto de índices) un conjunto no vacío de subespacios. Entonces $\bigcap_\alpha S_\alpha$ (la intersección de todos los S_α) es un subespacio de V.

Demostración. Veamos que $\bigcap_\alpha S_\alpha$ verifica S').

Si A, B $\in \bigcap S_\alpha$ y a, b son escalares, entonces A, B pertenecen a cada uno de los S_α, luego $aA + bB$ pertenece a todos los S_α y, por consiguiente, a su intersección.

Ejemplos

1. Sea V el espacio de los polinomios de grado ≤ 3. Sea S_1 el subespacio de los polinomios de grado ≤ 2 y S_2 el subespacio formado por los polinomios de la forma $aX + bX^2 + cX^3$. Entonces $S_1 \cap S_2$ es el conjunto de los polinomios de la forma $aX + bX^2$, que es un subespacio de V.

2. Sea V el espacio de todas las funciones continuas reales. Sea S_1 el subespacio de todas las funciones que valen cero para $x = a$, y S_2 el de todas las que valen cero para $x = b$. Entonces $S_1 \cap S_2$ es el conjunto de las funciones que se anulan en a y b.

3. Sea V el espacio de todas las funciones reales continuas. Sea S_α (α entero) el conjunto de funciones que se anulan en $x = 2\pi\alpha$, entonces $\cap S_\alpha$ es el conjunto de funciones que se anulan en $x = 2\pi i$ para todo entero i. Determine el lector 17 funciones diferentes que pertenecen a $\cap S_\alpha$.

Teorema 2.7.3. Sea C un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Entonces existe un subespacio $S \subseteq V$ tal que:

i) $S \supseteq C$.
ii) Para todo subespacio S' tal que $S' \supseteq C$ se tiene $S' \supseteq S$.

(S es, entonces, el menor subespacio que contiene C.)

Demostración. Sea $\{S_\alpha\}$ el conjunto de todos los subespacios que contienen C. $\{S_\alpha\}$ no es vacío ya que $C \subseteq V$ y V es un subespacio de V.

Sea $S = \cap S_\alpha$. Como C está contenido en todos los S_α, entonces está contenido en su intersección S. Es decir $C \subseteq S$.

Si $S' \supseteq C$, entonces S' es alguno de los S_α y, como $S = \cap S_\alpha$ está contenido en cada uno de los S_α, resulta $S \subseteq S'$.

Definición. El subespacio S citado en el teorema 2.7.3 se llama ***subespacio generado por el conjunto*** C.

Teorema 2.7.4. Sea C un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Entonces el subespacio generado por C es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores de C.

Demostración. Sea S el subespacio generado por C y sea S' el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de C.

Como C es parte de S y S es un subespacio, toda combinación de elementos de C debe pertenecer a S, luego $S' \subseteq S$.

Veamos que, a su vez, S' es un subespacio de V que contiene C.

Si V, V' son vectores de S', existen vectores $V_1, \ldots, V_r$, V_1', $\ldots, V_s'$ en C y escalares a_i, a_j' tales que $V = a_1V_1 + \ldots + a_rV_r$, $V' = a_1'V_1' + \ldots + a_s'V_s'$, puesto que todos los vectores de S' son combinaciones de vectores de C, y si c y c' son escalares

$$cV + c'V' = ca_1V_1 + \ldots + ca_rV_r + c'a_1'V_1' + \ldots + c'a_s'V_s'$$

también es una combinación de elementos de C, luego $cV + c'V' \in S'$.

Por lo tanto, S' es un subespacio de V. Por otra parte, entre todas las combinaciones lineales de elementos de C aparece, para cada $V \in C$, $1 \cdot V$, luego $V \in S'$ es decir $C \subseteq S'$.

Como S' es un subespacio que contiene C, por la definición de S resulta $S' \supseteq S$.

De $S' \subseteq S$, $S' \supseteq S$ se deduce $S' = S$.

Definición. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial V, y sea $C = S_1 \cup S_2$ (es decir C es el conjunto de vectores que pertenecen por lo menos a uno de los S_i). Se llama ***suma*** de los subespacios S_1 y S_2 (y se escribe $S_1 + S_2$) al subespacio de V generado por C.

Teorema 2.7.5. $S_1 + S_2$ es el conjunto de sumas $V + V'$ con $V \in S_1$, $V' \in S_2$.

Demostración. Por el teorema anterior y la definición de suma, $S_1 + S_2$ es el conjunto de combinaciones lineales de vectores de C, es decir $A \in S_1 + S_2$ si, y sólo si, existen vectores $V_1, \ldots,$ $V_r \in C$ y escalares a_i con $A = a_1V_1 + \ldots + a_rV_r$.

Como los vectores de C pertenecen a S_1 o a S_2, agrupando primero los términos que están en S_1 y los que no en segundo lugar, resulta

$$A = (a_1V_1 + \ldots + a_sV_s) + (a_{s+1}V_{s+1} + \ldots + a_rV_r)$$

Pero $V_1, \ldots, V_s \in S_1$ y S_1 es un subespacio implican que el primer paréntesis es un vector V de S_1. Los vectores del segundo paréntesis están en S_2, luego por las mismas razones éste es un vector $V' \in S_2$, es decir $A = V + V'$.

Es evidente, por otro lado, que todas las sumas $V + V'$ están en $S_1 + S_2$, lo que concluye la demostración.

Ejercicios

1. En el espacio de las fuerzas que actúan sobre un punto determinar los subespacios generados por:

i) una fuerza no nula,
ii) dos fuerzas no colineales,
iii) tres fuerzas coplanares.

2. En el espacio de las ternas de números, encontrar bases para los subespacios generados por:

i) el vector $(3, 1, 2)$,
ii) los vectores $(3, 1, 2)$ y $(6, 2, 4)$,
iii) los vectores $(3, 1, 2)$ y $(3, 2, 1)$,
iv) los vectores $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$ y $(3, 0, 3)$.

3. En el espacio de las ternas de números calcular $S_1 \cap S_2$ si:

i) S_1 es el subespacio de los vectores (o, x, y), siendo x e y variables, y S_2 es el subespacio del ejercicio 2. iii).
ii) S_1 es el subespacio generado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ y S_2 es el mismo anterior.

4. En el espacio de las 4-uplas de números calcular una base de $S_1 + S_2$ si:

i) S_1 está generado por $(1, 0, 0, 0)$ y S_2 está generado por $(1, 2, 3, 4)$ y $(1, 2, 0, 0)$.

ii) S_1 es el conjunto de vectores $(x, y, 0, z)$ y S_2 está generado por $(3, 1, 2, 0)$ y $(3, 2, 1, 0)$.

Definición. Sea $\{S_1, \ldots, S_n\}$ un conjunto de subespacios y sea $C = \cup S_i$ el conjunto de vectores que pertenecen por lo menos a uno de los S_i. Se llama *suma* de los S_i al subespacio S generado por C, y se escribe $S = S_1 + \ldots + S_n$ o bien $S = \Sigma_1^n S_i$.

En síntesis, la suma S se puede definir como un subespacio que satisface las condiciones siguientes:

a) para todo $i = 1, \ldots, n$, $S_i \subseteq S$,

b) si S' es un subespacio tal que $S_i \subseteq S'$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces $S \subseteq S'$.

Teorema 2.7.6. La suma $S_1 + \ldots + S_n$ es el conjunto S de vectores de la forma $A_1 + \ldots + A_n$ con $A_i \in S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Demostración. Por el teorema 2.7.4, S es el conjunto de combinaciones lineales $D = \sum c_j C_j$ de vectores $C_j \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C} = \cup S_i$, cada C_j pertenece por lo menos a un S_i. Reordenando la suma podemos escribir en primer lugar los términos en los que C_j está en S_1, luego aquéllos en los que C_j no está en S_1, pero sí en S_2, y así sucesivamente, y tenemos

$$D = \underbrace{c_1C_1 + \ldots + c_{r_1}C_{r_1}}_{\text{en } S_1} + \underbrace{c_{r_1+1}C_{r_1+1} + \ldots + c_{r_2}C_{r_2}}_{\text{en } S_2} + \ldots + c_sC_s$$

aplicando la ley asociativa, y llamando

$$D_1 = c_1C_1 + \ldots + c_{r_1}C_{r_1},$$

$$D_2 = c_{r_1+1}C_{r_1+1} + \ldots + c_{r_2}C_{r_2}, \text{ etc.}$$

tenemos

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_r$$

y $D_1 \in S_1$ por ser combinación de vectores de S_1, y por la misma razón $D_2 \in S_2$, etc.

Hemos demostrado pues que todo $D \in S$ es suma de vectores D_i con $D_i \in S_i$.

Ejercicios

Demostrar:

1. $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$.

2. $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3) = S_1 + S_2 + S_3$.

3. Si $S_3 \subseteq S_1 + S_2$, entonces

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_2$$

4. (Ley modular) Dados S_1, S_2, S_3, tales que

i) $S_1 \supseteq S_2$

ii) $S_1 + S_3 = S_2 + S_3$,
iii) $S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3$

entonces $S_1 = S_2$ (demostrar que todo X de S_1 pertenece a S_2.)

Definición. Si $S_1 \subseteq S_2$ son subespacios, se llama *complemento* de S_1 respecto a S_2 a un subespacio $S_1' \subseteq S_2$ tal que:

i) $S_1 \cap S_1' = (0)$,
ii) $S_1 + S_1' = S_2$.

Teorema 2.7.7. Dado $S_1 \subseteq S_2$ con S_2 de dimensión finita, existe siempre por lo menos un complemento.

Demostración. Sea $\{V_1, \ldots, V_r\}$ una base de S_1. Como $S_1 \subseteq S_2$, $\{V_1, \ldots, V_r\}$ es un conjunto l.i. en S_2, luego existen $\{V_{r+1}, \ldots, V_s\}$ tales que $\{V_1, \ldots, V_r, V_{r+1}, \ldots, V_s\}$ es una base de S_2.

Sea S' el subespacio generado por $\{V_{r+1}, \ldots, V_s\}$. Veamos que S' es un complemento de S_1 respecto a S_2.

Puesto que $C = S_1 \cup S'$ contiene $\{V_1, \ldots, V_s\}$, entonces el subespacio generado por C, es decir $S_1 + S'$, contiene al subespacio generado por $\{V_1, \ldots, V_s\}$, que es S_2 $(S_1 + S' \supseteq S_2)$. Como $S_1 \subseteq S_2$ y $S' \subseteq S_2$ por la definición de suma resulta $S_1 + S' \subseteq S_2$, luego $S_1 + S' = S_2$.

Sea $X \in S_1 \cap S'$, entonces $X \in S_1$ y $X \in S'$. Como $\{V_1, \ldots, V_r\}$ es una base de S_1 y $V_{r+1}, \ldots, V_s$ son generadores de S' resulta

$$X = a_1V_1 + \ldots + a_rV_r \quad y$$
$$-X = a_{r+1}V_{r+1} + \ldots + a_sV_s$$

luego la suma da:

$$0 = a_1V_1 + \ldots + a_rV_r + a_{r+1}V_{r+1} + \ldots + a_sV_s$$

pero como $\{V_1, \ldots, V_s\}$ es l.i.,

$$a_1 = o, \ldots, a_r = o, a_{r+1} = o, \ldots, a_s = o,$$

por lo tanto $X = 0$. Es decir, $S_1 \cap S' \subseteq (0)$. Como $(0) \subseteq S_1$ y $(0) \subseteq S'$ también $(0) \subseteq S_1 \cap S'$, luego $S_1 \cap S' = (0)$.

Corolario. Si $S_1 \subseteq S_2$ son subespacios, si dim S_2 es finita, y si S' es un complemento de S_1 respecto a S, entonces

$$\dim S' = \dim S_2 - \dim S_1.$$

Demostración. Sea $\{V_1, \ldots V_r\}$ una base de S_1 y $V_1', \ldots, V_k'$ una base de S'.

De $S_1 + S' = S_2$ se sigue que todo vector X de S_2 se puede escribir $X = Y + Z$, $Y \in S_1$, $Z \in S'$. Si $Y \in S_1$, Y es combinación lineal de $V_1, \ldots, V_r$ y $Z \in S'$ implica que Z es combinación lineal de $V_1', \ldots, V_k'$, luego X es combinación lineal de $V_1, \ldots, V_r, V_1', \ldots, V_k'$, es decir $\{V_1, \ldots, V_r, V_1', \ldots, V_k'\}$ es un conjunto de generadores de S_2.

Si, además, ese conjunto es l.i., entonces es una base de S_2, y como tiene $r + k$ vectores, se tiene

$$\dim S_2 = r + k = \dim S_1 + \dim S'.$$

Veamos que es l. i.:

Si $a_1V_1 + \ldots + a_rV_r + b_1V_1' + \ldots + b_rV_k' = 0$

entonces

$$V = a_1V_1 + \ldots + a_rV_r = -(b_1V_1' + \ldots + b_kV_k')$$

y la primera suma dice $V \in S_1$, la segunda $V \in S'$, luego $V \in S_1 \cap S'$ y, como $S_1 \cap S' = (0)$, resulta $V = 0$; luego $a_1V_1 + \ldots + a_rV_r = 0$ y como $\{V_1, \ldots, V_r\}$ es l.i. resulta $a_1 = o, \ldots, a_r = o$.

Del mismo modo

$$b_1 = o, \ldots, b_k = o$$

como queríamos demostrar.

Teorema 2.7.8. Si V es un espacio de dimensión finita, S_1, S_2 subespacios, entonces

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Demostración. Como V tiene dimensión finita, todos los subespacios tienen dimensión finita.

Como $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$, sea S' un complemento de $S_1 \cap S_2$ respecto a S_2, luego

$$(1) \qquad \dim S' = \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Veamos que S' es también complemento de S_1 respecto a $S_1 + S_2$.

En efecto, de $S' \subseteq S_2$ resulta

$$S' \cap S_1 \subseteq S_2 \cap S_1$$

y como $S' \cap S_1 \subseteq S'$, entonces

$$S' \cap S_1 \subseteq S' \cap (S_2 \cap S_1) = (0)$$

Por otra parte, $S_2 \cap S_1 \subseteq S_1$, luego

$$S' + S_1 = S' + S_1 + (S_2 \cap S_1) = [S' + (S_2 \cap S_1)] + S_1 = S_2 + S_1.$$

por lo tanto

$$(2) \qquad \dim S' = \dim (S_2 + S_1) - \dim S_1$$

De (1) y (2) resulta el teorema.

Ejercicios

1. Utilizar el teorema anterior para encontrar otra demostración de la ley modular.

2. En el ejemplo de las fuerzas que actúan sobre un punto, si S es el subespacio generado por dos fuerzas F_1 y F_2 de direcciones diferentes, encontrar un complemento de S respecto a V.

3. Sea V el espacio de las ternas de números (x, y, z). Sea S_1 el subespacio generado por $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, y S_2 el subespacio de las ternas (a, b, c) tales que $a + b + c = o$. Calcular $S_1 + S_2$, $S_1 \cap S_2$ y verificar el teorema anterior.

3

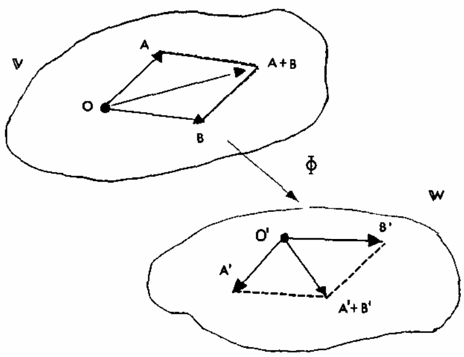
TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Definición y Ejemplos

Así como cuando se estudian las funciones de los números reales, con valores también reales, interesan especialmente las funciones continuas, cuando estudiamos funciones de un espacio vectorial con valores en otro interesan aquéllas que poseen ciertas propiedades especiales.

Las funciones continuas son aquéllas que preservan ciertas propiedades topológicas de los números reales. En los espacios vectoriales interesa, en cambio, conservar las estructuras algebraicas.

Se trata, entonces, de conservar las operaciones; es decir, que la transformación sea tal que "conserve" las dos operaciones fundamentales que definen la estructura de espacio vectorial. Es decir, si Φ es una transformación de un espacio V en un espacio W tal que $\Phi(A) = A'$ y $\Phi(B) = B'$, queremos que $\Phi(A+B) = A' + B'$ y $\Phi(kA) = k\,\Phi(A)$ para todo escalar k.



En síntesis, podemos dar la siguiente definición.

Definición. Una función $\Phi : V \to W$ (de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W) se dice una transformación lineal si, para todo A, B $\in$ V, k $\in$ $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ es el cuerpo de escalares) se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(A + B) &= \Phi(A) + \Phi(B) \\ \Phi(kA) &= k\,\Phi(A). \end{aligned}$$

Conviene observar que en las igualdades anteriores las operaciones que figuran en cada miembro tienen significados diferentes.

En el caso $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, el signo de suma del primer miembro, en A + B, significa la suma efectuada en el espacio V, en tanto que en el segundo miembro tenemos $\Phi(A) + \Phi(B)$ y, como $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ en W, luego $\Phi(A) + \Phi(B)$ representa la suma realizada en W. Una observación igual puede hacerse en la condición $\Phi(kA) = k\,\Phi(A)$.

Consideremos algunos ejemplos:

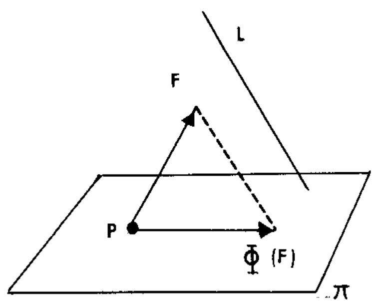
1. Sea V el espacio de las ternas ordenadas de números (a, b, c) y W el espacio de los pares ordenados de números. Definamos Φ por la condición $\Phi(a, b, c) = (a, b)$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi[(a, b, c) + (a', b', c')] &= \Phi(a + a', b + b', c + c') = (a + a', b + b') = \\ &= (a, b) + (a', b') = \Phi(a, b, c) + \Phi(a', b', c'), \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(k(a, b, c)) &= \Phi(ka, kb, kc) = (ka, kb) = k(a, b) = \\ &= k\,\Phi(a, b, c) \end{aligned}$$

luego es una transformación lineal.

2. Sea V el espacio vectorial de las fuerzas que actúan en un punto P, π un plano que pasa por P y W el espacio vectorial de las fuerzas que actúan sobre P, cuyas direcciones son rectas de π. Consideremos una dirección L cualquiera que no sea paralela a π, y sea Φ la transformación que a cada fuerza F de V le hace corresponder su proyección sobre π según la dirección L. Queda a cargo del lector verificar que Φ es una transformación lineal.



3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $V_1, \ldots, V_n$ una base de V. Entonces, para cada vector $X \in V$ existen escalares

únicos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $X = x_1 V_1 + \ldots\ x_n V_n$. Sea W otro espacio vectorial y $Z_1, \ldots, Z_n$ un conjunto *cualquiera* de vectores de W. Definamos Φ por la condición

$$\Phi(X) = x_1 Z_1 + \ldots + x_n Z_n$$

Φ es una transformación lineal (¡ verifíquese!).

4. Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios y W el espacio de las funciones continuas. Si $p[X] \in V$, definimos $\Phi(p[X]) = p(X)$, es decir, la función (continua) definida por el polinomio p. Para comprobar que Φ es una transformación lineal conviene recordar que la suma de dos polinomios

$$a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \text{ y } b_0 + b_1X + \ldots + b_n X^r$$

se define por

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \ldots + (a_b + b_s)X^s,$$

donde $s = \text{máx}(n, r)$ y $a_c = 0$ si $n < c \leq s$, $b_c = 0$ si $r < c \leq s$. Por otro lado, para funciones continuas $f(x)$, $g(x)$ la suma se define punto a punto, es decir, $f + g$ es la función que en cada punto t vale $f(t) + g(t)$, o sea, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Los polinomios $p(X)$ definen una función $p(x) = \Phi(p(X))$ que, para cada valor t, toma como valor $p(t)$, es decir, el número que resulta de reemplazar X por t. (Si $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, entonces $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.)

Para demostrar que Φ es lineal habrá que verificar, en primer lugar, que $\Phi(p + g) = \Phi(p) + \Phi(g)$, es decir, la función

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

toma, para cada t, el valor suma de $a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ más $b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$.

Un razonamiento similar debe hacerse para verificar que

$$\Phi(kp) = k\,\Phi(p)$$

si k es un escalar.

Teorema 3.1.1. Para toda transformación lineal Φ, se tiene

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$
$$\Phi(0) = 0$$

Demostración. Si $A \in V$, $A + 0 = A$, y como Φ es lineal resulta $\Phi(A) + \Phi(0) = \Phi(A)$, luego $\Phi(0) = 0$.

$-X$ es el único vector tal que $X + (-X) = 0$, luego

$$0 = \Phi(0) = \Phi(X + (-X)) = \Phi(X) + \Phi(-X)$$

por lo tanto

$$\Phi(-X) = -\Phi(X).$$

Teorema 3.1.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, W un espacio vectorial, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ una base de V y $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ un conjunto cualquiera de vectores de W. Entonces existe una única transformación lineal $\Phi : V \to W$ tal que $\Phi(V_i) = Z_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Demostración. Si $X \in V$, existe un único conjunto ordenado de escalares $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $X = x_1 V_1 + \ldots + x_n V_n$. Entonces definimos $\Phi(X) = x_1 Z_1 + \ldots + x_n Z_n$.

Veamos que Φ es una transformación lineal. En efecto, si

$$X = x_1 V_1 + \ldots + x_n V_n, \quad Y = y_1 V_1 + \ldots + y_n V_n,$$

entonces

$$X + Y = (x_1 + y_1) V_1 + \ldots + (x_n + y_n) V_n \quad \text{y} \quad kX = kx\, V_1 + \ldots + kx\, V_n,$$

luego

$$\begin{aligned} \Phi(X + Y) &= (x_1 + y_1) Z_1 + \ldots + (x_n + y_n) Z_n = \\ &= x Z_1 + \ldots + x Z_n + y Z_1 + \ldots + y Z_n = \\ &= \Phi(X) + \Phi(Y) \end{aligned}$$

$$(kX) = kx Z_1 + \ldots + kx Z_n = k(x Z_1 + \ldots + x Z_n) = k\,\Phi(X).$$

Esto prueba la existencia de Φ.

Para probar la unicidad, si Φ_1 y Φ_2 son transformaciones lineales que cumplen las condiciones del teorema, tenemos, para todo $X \in V$, que

$$\begin{aligned} \Phi_1(X) &= \Phi_1(x_1 V_1 + \ldots + x_n V_n) = x_1 \Phi_1(V_1) + \ldots + x_n \Phi_1(V_n) = \\ &= x_1 Z + \ldots + x_n Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(X) &= \Phi_2(x_1 V_1 + \ldots + x_n V_n) = x_1 \Phi_2(V_1) + \ldots + x_n \Phi_2(V_n) = \\ &= x_1 Z_1 + \ldots + x_n Z_n \end{aligned}$$

luego $\Phi_1(X) = \Phi_2(X)$ para todo X, es decir $\Phi_1 = \Phi_2$.

2. Núcleo, Conúcleo e Imagen

En el ejemplo 1 de la sección anterior vimos que si un vector de V es de la forma (0, 0, c) entonces $\Phi(0, 0, c) = (0, 0)$ y (0, 0) es el vector nulo de W. Así también, si $\Phi(a, b, c) = (0, 0)$, entonces $a = b = 0$, es decir, los vectores de V que se aplican en el cero por Φ son exactamente aquéllos de la forma (0, 0, c).

Definición. Sea $\Phi : V \to W$ una transformación lineal. Se llama *núcleo* de Φ (notación: Ker Φ) al conjunto de vectores $X \in V$ tal que $\Phi(X) = 0$.

En el ejemplo 2, Ker Φ está compuesto por todas las fuerzas cuya dirección es paralela a la recta L. En el ejemplo 4, Ker Φ consiste solamente en el polinomio cero. (En efecto, para que p (x) sea la función cero, entonces todo número real es raíz de la ecuación $p(x) = o$, y si p no es el polinomio nulo, tendrá un cierto grado r, y es sabido que un polinomio de grado r no puede tener más de r raíces.)

Ejercicios

1. Sea V el espacio de ternas ordenadas y W el espacio de cuaternas ordenadas. Consideremos la base compuesta por las ternas (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) y Φ la transformación lineal definida en el ejemplo 3 tomando $Z_1 = (1, 2, 3, 4)$, $Z_2 = (1, 0, 1, 0)$, $Z_3 = (0, 2, 2, 4)$ (es decir, definida por $\Phi(a, b, c) = a Z_1 + b Z_2 + c Z_3$). Calcular Ker Φ.

2. Sean V = W el espacio de los polinomios de grado menor que 3. Φ la transformación definida por

$$\Phi(a_0 + a_1X + a_2X^2) = (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) X + (a_2 + a_0) X^2$$

a) Demostrar que Φ es una transformación lineal.

b) Calcular Ker Φ.

Utilizaremos la notación t. l. para transformación lineal.

Teorema 3.2.1. Si $\Phi: V \to W$ es una t. l., Ker Φ es un subespacio de V.

Demostración. Utilizando los resultados del Cap. II, sección 6, sabemos que Ker Φ será un subespacio si, y sólo si, para todo X, Y $\in$ Ker Φ, a, b escalares, se obtiene $aX + bY \in$ Ker Φ. Entonces, si X, Y $\in$ Ker Φ serán $\Phi(X) = \Phi(Y) = 0$ y como Φ es t. l. resulta

$\Phi(aX + bY) = \Phi(aX) + \Phi(bY) = a\,\Phi(X) + b\,\Phi(Y) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$

luego $aX + bY \in \operatorname{Ker} \Phi$.

Teorema 3.2.2. Si S es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, existe una transformación $\Phi : V \to V$ tal que $\operatorname{Ker} \Phi = S$.

Demostración. Sea $S \subseteq V$. Como S es un subespacio, entonces existen vectores $V_1, \ldots, V_r \in S$ que forman una base de S. En particular, son l.i. en V, luego se puede completar una base, es decir, encontrar vectores $W_{r+1}, \ldots, W_n$ tales que

$$V_1, \ldots, V_r, \; W_{r+1}, \ldots, W_n$$

sea una base de V.

Como todo vector $X \in V$ se escribe

$$X = x_1 V_1 + \ldots + x_r V_r + x_{r+1} W_{r+1} + \ldots + x_n W_n,$$

llamamos $\Phi(X)$ al vector

$$\Phi(X) = x_{r+1} W_{r+1} + \ldots + x_n W_n.$$

Es fácil verificar que Φ es una t.l. Además, para que $\Phi(X) = 0$, como $W_{r+1}, \ldots, W_n$ son l.i., entonces necesariamente $x_{r+1} = \ldots = x_n = o$, es decir $\Phi(X) = 0$ si, y sólo si, X es combinación lineal de $V_1, \ldots, V_r$, y como estos vectores generan S, entonces $\operatorname{Ker} \Phi = S$.

Definición. Sea $\Phi : V \to W$ una t.l. Se llama *imagen* de Φ (notación: $\operatorname{Im} \Phi$) al conjunto de vectores $Y \in W$, tales que existe $X \in V$ con $\Phi(X) = Y$.

Es decir, $\operatorname{Im} \Phi$ es el conjunto de vectores $\Phi(X) \in W$ para todo $X \in V$.

Ejemplos

1. En los ejemplos 1 y 2 de la sección 1 de este capítulo, $\operatorname{Im} \Phi$ es la totalidad de W.

2. En la transformación definida en el teorema anterior, $\operatorname{Im} \Phi$ es el subespacio generado por $\{W_{r+1}, \ldots, W_n\}$.

3. Sea $V = W$ el espacio de las ternas de números y Φ la transformación tal que $\Phi(a, b, c) = (a, b, o)$. Entonces $\operatorname{Im} \Phi$ es el conjunto de vectores de la forma (x, y, o).

Ejercicios

1. Verificar las afirmaciones enunciadas en los ejemplos anteriores.

2. Sean V el espacio de los polinomios y W el espacio de las ternas de números. Determinar la imagen de las t.l. definidas por

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{i)} & \Phi_1(\Sigma\, a_i X^i) & = & (a_0 + a_1,\ 0,\ a_2) \\
\text{ii)} & \Phi_2(\Sigma\, a_i X^i) & = & (\Sigma\, a_i,\ a_1,\ 0) \\
\text{iii)} & \Phi_3(\Sigma\, a_i X^i) & = & (a_0,\ a_1,\ a_2) \\
\text{iv)} & \Phi_4(\Sigma\, a_i X^i) & = & (a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0) \\
\text{v)} & \Phi_5(\Sigma\, a_i X^i) & = & (a_0 - a_1,\ a_1 - a_2,\ a_0 - a_2)
\end{array}
$$

(¡Verifique si $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$ son t.l.!)

Teorema 3.2.3. Si $\Phi : V \to W$ es una t.l., entonces Im Φ es un subespacio de W.

Demostración. Para verificar que Im Φ es un subespacio basta verificar que, si $Y_1, Y_2 \in$ Im Φ y si k_1, k_2 son escalares, entonces $k_1Y_1 + k_2 Y_3 \in$ Im Φ.

En efecto, $Y_1, Y_2 \in$ Im Φ implica que existen X_1, X_2 tales que $Y_1 = \Phi(X_1)$, $Y_2 = \Phi(X_2)$.

Entonces

$$\Phi(k_1X_1 + k_2 X_2) = k_1\, \Phi(X_1) + k_2\, \Phi(X_2) = k_1 Y_1 + k_2 Y_2$$

es decir

$$k_1 Y_1 + k_2 Y_2 \in \operatorname{Im} \Phi$$

luego Im Φ es un subespacio de W.

Ejercicio

Demuestre que todo subespacio S de un espacio es imagen de alguna t.l. Φ.

Teorema 3.2.4. Sea $\Phi : V \to W$ una t.l. Si $\{V_\alpha\}$ es un conjunto de generadores de V, entonces $\{\Phi(V_\alpha)\}$ es un conjunto de generadores de Im Φ.

Demostración. Sea $Y \in$ Im Φ, entonces existe $X \in V$ con $\Phi(X) = Y$ y, por lo tanto, existen $V_1, \ldots, V_s \in \{V_\alpha\}$ tales que

$$X = k_1 V_1 + \dots + k_s V_s,$$

luego

$$Y = \Phi(X) = k_1 \Phi(V_1) + \dots + k_s \Phi(V_s).$$

Teorema 3.2.5. Sea $\Phi : V \to W$ una t.l. y sean $V_1, \dots, V_r \in V$. Si $\Phi(V_1), \dots, \Phi(V_r)$ son l.i. en W, entonces $V_1, \dots, V_r$ son l.i. en V.

Demostración. Sea $x_1 V_1 + \dots + x_r V_r = 0$, entonces, como $\Phi(0) = 0$ tenemos $x_1 \Phi(V_1) + \dots + x_r \Phi(V_r) = 0$, luego, por ser $\Phi(V_1), \dots, \Phi(V_r)$ l.i. resultan necesariamente $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$.

Ejercicios

1. Buscar una t.l. $\Phi : V \to W$ y vectores $V_1, \dots, V_r \in V$ tales que $\{\Phi(V_1), \dots, \Phi(V_r)\}$ generen Im Φ, aunque $\{V_1, \dots, V_r\}$ no sean generadores de V.

2. Buscar una t.l. $\Phi : V \to W$ y vectores $V_1, \dots, V_r$ en V tales que $\{V_1, \dots, V_r\}$ sean l.i. en V, aunque $\Phi(V_1), \dots, \Phi(V_r)$ no sean l.i. en W.

Si observamos el ejemplo 1 de la sección 1 de este capítulo tenemos que Φ es la transformación del espacio de ternas en el espacio de pares definida por $\Phi(a, b, c) = (a, b)$ y que Ker Φ es el subespacio de vectores de la forma (o, o, x). Luego Ker Φ tiene dimensión 1, puesto que $(o, o, x) = x(o, o, 1)$ y el $(o, o, 1)$ es un generador (no nulo) de Ker Φ. Por otro lado, Im Φ es todo el espacio de pares, que se sabe tiene dimensión 2, y como el espacio de ternas tiene dimensión 3 nos resulta, en este ejemplo, que de $\Phi : V \to W$ se obtiene

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \Phi + \dim \operatorname{Im} \Phi.$$

Veamos que este resultado es general.

Teorema 3.2.6. Sea $\Phi : V \to W$ una t.l. y sea V de dimensión finita. Entonces Im Φ es un subespacio de dimensión finita de W y

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \Phi + \dim \operatorname{Im} \Phi$$

Demostración. Como V se supone de dimensión finita tiene un conjunto finito de generadores $A_1, \dots, A_r$. Según el teorema 3.2.4 resulta que $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_r)$ generan Im Φ, luego Im Φ tiene dimensión finita.

Por consiguiente, podemos encontrar una base $Z_1, \ldots, Z_z$ de Im Φ. Como $Z_1, \ldots, Z_s \in$ Im Φ, existen $Y_1, \ldots, Y_s$ en V tales que $Z_1 = \Phi(Y_1), \ldots, Z_s = \Phi(Y_s)$. Según el teorema 3.2.5, $\{Y_1, \ldots, Y_s\}$ son l.i. en V.

Sea ahora $\{V_1, \ldots, V_r\}$ una base de Ker Φ. Es preciso demostrar que $\{V_1, \ldots, V_r, Y_1, \ldots, Y_s\}$ forman una base de V.

a) $\{V_1, \ldots, V_r, Y_1, \ldots, Y_s\}$ es un conjunto l.i.

En efecto, si

$$a_1 V_1 + \ldots + a_r V_r + b_1 Y_1 + \ldots + b_s Y_s = 0, \qquad [1]$$

aplicando Φ resulta, puesto que $\Phi(V_i) = 0$ porque $V_i \in$ Ker Φ,

$$\begin{aligned} b_1 \Phi(Y_1) + \ldots + b_s \Phi(Y_s) &= 0 \\ b_1 Z_1 + \ldots + b_s Z_s &= 0 \end{aligned}$$

y como $\{Z_1, \ldots, Z_s\}$ es l.i., necesariamente $b_1 = \ldots = b_s = 0$.

Luego la ecuación [1] se reduce a

$$a_1 V_1 + \ldots + a_r V_r = 0$$

y como $\{V_1, \ldots, V_r\}$ es l.i. por ser una base de Ker Φ, entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.

b) $\{V_1, \ldots, V_r, Y_1, \ldots, Y_s\}$ genera V.

Sea $X \in V$. Debemos demostrar que X es una combinación lineal de los vectores del conjunto en estudio.

En primer lugar, $\Phi(X) \in$ Im Φ y, como $\{Z_1, \ldots, Z_s\}$ es una base de Im Φ, tenemos

$$\Phi(X) = k_1 Z_1 + \ldots + k_s Z_s$$

Como $\Phi(Y_j) = Z_j$, tomemos

$$A = X - k_1 Y_1 - \ldots - k_s Y_s,$$

luego $\Phi(A) = 0$, es decir, $A \in$ Ker Φ.

Pero, como $\{V_1, \ldots, V_r\}$ es una base de Ker Φ, resulta

$$A = b_1 V_1 + \ldots + b_r V_r$$

por lo tanto

$$X = t_1 V_1 + \dots + t_r V_r + k_1 Y_1 + \dots + k_s Y_s$$

como queríamos encontrar.

Luego, si dim Ker $\Phi = r$, dim Im $\Phi = s$ encontramos dim $V = r + s$, con lo que queda demostrado el teorema.

Hemos visto que un subespacio S de un espacio V es un subconjunto de V que constituye, por sí mismo, un espacio vectorial con las operaciones inducidas por las de V. Por lo tanto, podemos considerar a S desde dos puntos de vista, bien como un espacio vectorial aislado, bien como una parte de V. Llamemos, para aclarar las ideas, $\bar{S}$ al espacio aislado y S al subespacio de V. La aplicación que a cada $X \in \bar{S}$ hace corresponder el mismo X, pero ahora como elemento de V, es una transformación lineal que se llama *inclusión*.

El subespacio Ker $\Phi \subseteq V$, para cada $\Phi : V \to W$ puede definirse por una propiedad universal y una inclusión.

Definición. Si $\Phi : V \to W$ es una transformación lineal, se llama *conúcleo* de Φ (notación: CoKer Φ) a un espacio C y una transformación lineal $\Psi : W \to C$, tales que Ker Ψ = Im Φ e Im $\Psi = C$.

Teorema 3.2.7. Si $\Phi : V \to W$ es una t.l. y W tiene dimensión finita, entonces existe CoKer Φ.

Demostración. Como Im Φ es un subespacio de W y W tiene dimensión finita, también Im Φ tiene dimensión finita, luego existe una base finita $\{V_1, \dots, V_r\}$ de Im Φ.

Como $\{V_1, \dots, V_r\}$ es un conjunto l.i. existen vectores

$$W_{r+1}, \dots, W_n$$

en W, tales que $\{V_1, \dots, V_r, W_{r+1}, \dots, W_n\}$ es una base de W.

Sea C un espacio vectorial de dimensión $n - r$ y sea

$$\{Z_1, \dots, Z_{n-r}\}$$

una base de C (por ejemplo, se puede tomar C el espacio de las $(n - r)$-uplas de números y $Z_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, el 1 en posición i.).

Podemos entonces definir Ψ (véase teorema 3.1.2) tomando

$$\Psi(V_1) = \ldots = \Psi(V_r) = 0, \quad \Psi(W_{r+1}) = Z_1, \ldots, \quad \Psi(W_n) = Z_{n-r}.$$

Observación. Los teoremas 3.2.2 y 3.2.7 son válidos sin la restricción de dimensión finita. Para demostrarlos es necesario usar el concepto de espacio cociente (deducido de una relación de equivalencia) que no se introduce aquí por razones de espacio.

3. Matrices

Las propiedades de los vectores han sido estudiadas prescindiendo poco más o menos de las bases, pero para trabajar con ellos es necesario conocer una base y hacer los cálculos sobre el conjunto de coordenadas. En forma similar, si bien las transformaciones lineales pueden estudiarse sin hacer referencia alguna a las bases de los espacios dominio y codominio (que se definirán más adelante), un cálculo efectivo de las mismas exige el conocimiento de dichas bases.

El teorema 3.1.2 nos dice que una transformación lineal φ queda determinada si se conocen los vectores $\varphi(V_1), \ldots, \varphi(V_n)$ para una base $V_1, \ldots, V_n$ del dominio, lo que nos permitirá conocer φ si podemos caracterizar dicho conjunto finito de vectores del codominio.

Este teorema nos muestra la importancia de las bases en el cálculo de transformaciones lineales.

Supongamos conocidas una base ordenada $V_1, \ldots, V_n$ de V, una base ordenada $W_1, \ldots, W_s$ de W y sea $\varphi : V \to W$ una transformación lineal.

Entonces tendremos vectores

$$\begin{aligned}
\varphi(V_1) &= a_{11} W_1 + a_{21} W_2 + \ldots + a_{s1} W_s \\
\varphi(V_2) &= a_{12} W_1 + a_{22} W_2 + \ldots + a_{s2} W_s \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(V_n) &= a_{1n} W_1 + a_{2n} W_2 + \ldots + a_{sn} W_s
\end{aligned}$$

Y queremos ver que el conjunto de escalares a_{ij} que figura allí, con la doble ordenación dada por el par de índices, sirve para calcular $\varphi(X)$ cualquiera que sea X en V.

Para simplificar la notación escribimos dichos escalares en un rectángulo

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}$$

que se denomina la matriz de φ en las bases $V_1, \dots, V_n$ de V y $W_1, \dots, W_s$ de W.

Así como las coordenadas de un vector cambian cuando se modifica la base de referencia, también la matriz de φ será en general diferente si se toman bases distintas en V y en W. Podemos determinar cómo cambian los coeficientes de la matriz de φ al cambiar las bases, y éste es el objetivo de la sección 3.5.

Volviendo a nuestro rectángulo de coeficientes decimos que: Dadas las bases *ordenadas*, escribimos como primera *columna* las coordenadas de $\varphi(V_1)$ respecto a la base $W_1, \dots, W_s$, en el orden que les corresponde, como segunda columna las coordenadas de $\varphi(V_2)$, y así sucesivamente.

Podemos decir que la matriz de φ se ha construido tomando la sucesión $\varphi(V_1), \dots, \varphi(V_n)$ y desarrollando cada uno de estos vectores como columna en función de las bases $W_1, \dots, W_r$, es decir, poniendo

$\varphi(V_1)$	$\varphi(V_2)$	....	$\varphi(V_r)$	
a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	W_1
a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	W_2
....	....	....	....	.
....	....	....	....	.
a_{s1}	a_{s2}	....	a_{sn}	W_s

de donde resulta $\varphi(V_j) = \sum a_{ij} W_i$. Como ambas bases están ordenadas, no es necesario escribirlas, puesto que el lector sabe a qué vector de base corresponde cada escalar dada su posición en la matriz.

Veamos ahora como dado un vector cualquiera $X \in V$ se puede determinar $\varphi(X)$.

Si $X \in V$, entonces $X = x_1V_1 + \ldots + x_n V_n$ puesto que $V_1, \ldots, V_n$ es una base, y como φ es una transformación lineal tendremos

$$\varphi(X) = x_1 \varphi(V_1) + \ldots + x_n \varphi(V_n).$$

Escribiendo ahora cada uno de los vectores $\varphi(V_j)$ en función de las bases $W_1, \ldots, W_s$ resultará

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= x_1 (a_{11} W_1 + a_{21} W_2 + \ldots + a_{s1} W_s) + \\
&+ x_z (a_{12} W_1 + a_{22} W_2 + \ldots + a_{s2} W_s) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x_n (a_{1n} W_1 + a_{2n} W_2 + \ldots + a_{sn} W_s = \\
&= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n) W_1 + \\
&+ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n) W_2 + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \ldots + a_{sn} x_n) W_s
\end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos las coordenadas de $\varphi(X)$ respecto a la base $W_1, \ldots, W_s$, conocidas las coordenadas de X respecto a la base $V_1, \ldots, V_n$, y la matriz de φ en las bases dadas.

Si escribimos

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_s \end{vmatrix}$$

Entenderemos que

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\
y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n,
\end{aligned}$$

etc., o sea, *cada* y_i es la suma de los productos de cada elemento de la fila i de la matriz por el elemento que ocupa el mismo lugar en la sucesión de las coordenadas de X, y entonces $y_1, y_2, \ldots, y_s$ serán las coordenadas de $\varphi(X)$ en la base $W_1, \ldots, W_s$.

Ejercicios

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ y sea φ la transformación definida por

$$\varphi((x, y, z)) = (x + y, x - z).$$

a) Calcular la matriz de φ si se toman como bases:

$$V_1 = (1, 0, 0) \qquad V_2 = (0, 1, 0) \qquad V_3 = (0, 0, 1)$$
$$W_1 = (1, 0) \qquad W_2 = (0, 1)$$

b) Calcular la matriz de φ si se eligen como bases

$$V_1 = (1, 1, 0) \qquad V_2 = (1, 0, 1) \qquad V_3 = (0, 1, 1)$$
$$W_1 = (1, 2) \qquad W_2 = (2, 3)$$

2. Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, y las bases se eligen como en el ejercicio 1a), sea la matriz de $\varphi \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{Vmatrix}$. Calcular $\varphi(X)$ para los siguientes vectores:

$$X = (1, 0, 2)$$
$$X = (1, 2, 3)$$
$$X = (2, -1, 5)$$

4. Operaciones con Transformaciones Lineales

Hasta ahora hemos trabajado con una transformación lineal, veamos lo que podemos encontrar trabajando con varias transformaciones lineales o, en su defecto, con todas las transformaciones lineales entre dos espacios $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$.

Las transformaciones lineales son esencialmente funciones, donde la variable recorre los vectores de $\mathbb{V}$ y la función toma los valores en $\mathbb{W}$.

Definición. Si $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, el espacio $\mathbb{V}$ se llama *dominio* de Φ y el espacio $\mathbb{W}$ se llama *codominio* de Φ.

Definición. Dos transformaciones lineales $\Phi, \Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dicen iguales si para todo $X \in \mathbb{V}$ se tiene $\Phi(X) = \Psi(X)$.

Esta es la misma definición de igualdad que se utiliza para funciones, en general. Nos es útil porque podemos definir una transformación lineal Φ fijando los valores $\Phi(X)$ para todo X del dominio (verificando entonces que Φ es transformación lineal).

Cuando en el análisis elemental se tienen dos funciones continuas, se define la suma punto a punto; es decir, se define la función $f + g$ como aquélla cuyos valores son $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada x. Luego hay que verificar que la suma de funciones continuas es continua.

Estudiando transformaciones lineales debemos hacer algo similar.

Definición. Dadas dos transformaciones lineales, $\Phi, \Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se llama suma (y se escribe $\Phi + \Psi$) a la función definida por

$$(\Phi + \Psi)(X) = \Phi(X) + \Psi(X)$$

para todo $X \in \mathbb{V}$.

Observaciones

1. Para definir la suma de dos transformaciones lineales es necesario que ambas tengan el mismo dominio y el mismo codominio.

2. El signo + en $\Phi + \Psi$ es por el momento sólo un signo formal, mientras que el signo + que aparece en el segundo miembro de la fórmula precedente es una suma de vectores en $\mathbb{W}$.

Teorema 3.4.1. La suma de dos transformaciones lineales es una transformación lineal.

Demostración. Si $\Phi, \Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ son transformaciones lineales, para demostrar que $\Phi + \Psi$ también lo es, debemos verificar que:

$$(\Phi + \Psi)(X + Y) = (\Phi + \Psi)(X) + (\Phi + \Psi)(Y)$$

para todo $X, Y \in \mathbb{V}$, y

$$(\Phi + \Psi)(kX) = k \cdot (\Phi + \Psi)(X)$$

para todo $k \in \mathbb{K}$, $X \in \mathbb{V}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}(\Phi + \Psi)(X + Y) &= \Phi(X + Y) + \Psi(X + Y) = \\ &= \Phi(X) + \Phi(Y) + \Psi(X) + \Psi(Y) = \\ &= \Phi(X) + \Psi(X) + \Phi(Y) + \Psi(Y) = \\ &= (\Phi + \Psi)(X) + (\Phi + \Psi)(Y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Phi + \Psi)(kX) &= \Phi(kX) + \Psi(kX) = \\ &= k\,\Phi(X) + k\,\Psi(X) = \\ &= k \cdot (\Phi(X) + \Psi(X)) = \\ &= k \cdot (\Phi + \Psi)(X).\end{aligned}$$

Observación. En los distintos pasos de esta demostración se ha utilizado: a) la definición de la suma de transformaciones lineales, b) el hecho de ser Φ y Ψ transformaciones lineales y c) las propiedades conmutativa y distributiva de la suma que valen en el espacio W. ¿Podría el lector indicar cuál propiedad se ha utilizado en cada paso?

Teorema 3.4.2. Sean $\Phi, \Psi : V \to W$, $(V_1, \ldots, V_n)$ una base ordenada de V y $(W_1, \ldots, W_r)$ una base ordenada de W. Si $\|a_{ij}\|$ y $\|b_{ij}\|$ son, respectivamente, las matrices de Φ y Ψ en dichas bases, entonces $\|\Phi + \Psi\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|$; es decir, la matriz que en cada lugar (i, j) tiene por coeficiente la suma de los coeficientes de $\|\Phi\|$ y $\|\Psi\|$ que ocupan el mismo lugar (i, j) en cada una de ellas.

Demostración. Sabemos que $\|\Phi + \Psi\|$ se construye colocando en columna las coordenadas en la base $W_1, \ldots, W_r$ de cada uno de los vectores transformados de V_j. Entonces, si

$$\begin{aligned} \Phi(V_j) &= a_{1j} W_1 + \ldots + a_{rj} W_r \\ \Psi(V_j) &= b_{1j} W_1 + \ldots + b_{rj} W_r, \end{aligned}$$

tenemos (por definición) que

$$\begin{aligned} (\Phi + \Psi)(V_j) &= \Phi(V_j) + \Psi(V_j) = \\ &= (a_{1j} + b_{1j}) W_1 + \ldots + (a_{rj} + b_{rj}) W_r \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo

Si $\Phi, \Psi : V \to W$, V el espacio de ternas y W el de pares, tienen matrices.

$$\|\Phi\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{Vmatrix} \qquad \|\Psi\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Entonces

$$\|\Phi + \Psi\| = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$$

Definición. Dada una transformación lineal $\Phi : V \to W$ y un escalar k, se llama producto de k por Φ (notación $k\Phi$) a la transformación lineal de V en W definida por $(k\Phi)(X) = k \cdot \Phi(X)$.

Teorema 3.4.3. El producto de un escalar por una transformación lineal es una transformación lineal.

Demostración:

$$\begin{aligned} (k\Phi)(X + Y) &= k[\Phi(X + Y)] = k(\Phi(X) + \Phi(Y)) = \\ &= k \cdot \Phi(X) + k\Phi(Y) = (k\Phi)(X) + (k\Phi)(Y) \end{aligned}$$

$$(k\,\Phi)\,(tX) = k\cdot[\Phi\,(tX)] = k\cdot t\,\Phi(X) =$$
$$= t\cdot k\,\Phi(X) = t\cdot(k\,\Phi)\,(X).$$

Ejercicios

1. Dados dos espacios vectoriales V y W, demostrar que el conjunto de las transformaciones lineales de V en W (notación Hom (V, W)), con las operaciones definidas anteriormente, es un espacio vectorial.

2. Si V y W son de dimensión finita, si $V_1, \ldots, V_n$ es una base de V y si $W_1, \ldots, W_r$ una base de W, definimos $E_{ij} : V \to W$ (transformaciones lineales) haciendo

$$E_{ij}(V_k) = 0 \text{ si } k \neq i, \quad E_{ij}(V_i) = W_j$$

Esto define $n \times r$ transformaciones lineales (puesto que i varía de 1 a n y j de 1 a r).

Demostrar que el conjunto $\{E_{ij}\}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$) forma una base de $\mathrm{Hom}_k\,(V, W)$, luego

$$\dim\,[\mathrm{Hom}_k\,(V, W)] = \dim V \times \dim W.$$

Teorema 3.4.4. Si $\|\Phi\| = \|a_{ij}\|$ entonces $\|k\,\Phi\| = \|k\cdot a_{ij}\|$.

Demostración. Ya hemos visto que cada columna de la matriz de una transformación lineal de V en W, previamente fijadas las bases ordenadas de cada uno de estos espacios, se compone de las coordenadas, en la base elegida de W y del vector transformado de cada uno de los que componen la base elegida de V.

Luego

$$\|\Phi\| = \|a_{ij}\| \text{ si } \Phi(V_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\,W_i$$

por lo tanto,

$$(k\,\Phi)\,(V_j) = k\cdot\Phi\,(V_j) = k\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\,W_i = \sum_{i=1}^{r}(ka_{ij})\,W_i$$

es decir, todos los coeficientes de la matriz de Φ deben ser multiplicados por k para obtener la matriz de $k\,\Phi$.

Definición. Sean V_1, V_2, V_3 tres espacios vectoriales y sean $\Phi : V_1 \to V_2$, $\Psi : V_2 \to V_3$ transformaciones lineales. Se llama producto $\Psi\,\Phi : V_1 \to V_3$ a la transformación que resulta de la aplicación sucesiva de Φ y Ψ; es decir, para cada $X \in V$ será $(\Psi\,\Phi)\,(X) = \Psi\,(\Phi\,(X))$.

Observación. Para que este "producto" tenga sentido, es necesario que el dominio de Ψ coincida con el codominio de Φ, ya que debemos aplicar la transformación Ψ al vector $\Phi(X)$.

Teorema 3.4.5. El producto de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Demostración:

$$\begin{aligned}(\Psi\Phi)(X+Y) &= \Psi[\Phi(X+Y)] = \Psi[\Phi(X)+\Phi(Y)] = \\ &= \Psi[\Phi(X)] + \Psi[\Phi(Y)] = (\Psi\Phi)(X) + (\Psi\Phi)(Y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Psi\Phi)(kX) &= \Psi[\Phi(kX)] = \Psi[k\cdot\Phi(X)] = k\cdot\Psi[\Phi(X)] = \\ &= k(\Psi\Phi)(X).\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Sean $\mathbf{V}_1$ el espacio de ternas de números, $\mathbf{V}_2$ el de pares y $\mathbf{V}_3$ el espacio de los polinomios. Sean $\Phi : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, definido por

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$$

y $\Psi : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_3$, definido por $\Psi(a, b) = aX^2 + (b - a)X$. Calcular la transformación $\Psi\Phi$.

2. Sean $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$ espacios vectoriales, y

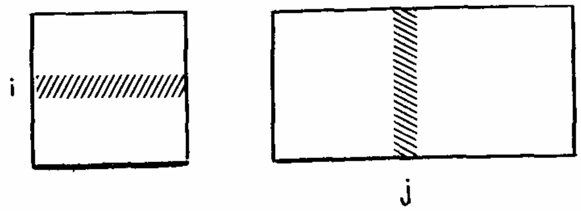
$$\Phi_1, \Phi_2 : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2,\quad \Psi_1, \Psi_2 : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_3,\quad \theta : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_4.$$

Demostrar que

$$\begin{aligned}\Psi_1(\Phi_1 + \Phi_2) &= \Psi_1\Phi_1 + \Psi_1\Phi_2 \\ (\Psi_1 + \Psi_2)\Phi_1 &= \Psi_1\Phi_1 + \Psi_2\Phi_1 \\ \theta(\Psi_1\Phi_1) &= (\theta\Psi_1)\Phi_1 .\end{aligned}$$

Definición. Dadas dos matrices $\|a_{ik}\|$ y $\|b_{ij}\|$ tales que el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda, se llama producto a la matriz que en cada lugar (i, j) tiene por coeficiente al escalar $\Sigma_k\, a_{ik} b_{kj}$; es decir la suma de los productos $a_{ik}\, b_{kj}$ obtenidos, para cada k, multiplicando el elemento que ocupa el lugar k en la fila i de la primera por el elemento que ocupa el mismo lugar k en la columna j de la segunda.

Esto indica que para encontrar el coeficiente del lugar (i, j) (fila i, columna j) del producto debe considerarse, en las matrices factores,



la fila i de la primera, que será $(a_{i1}, \ldots, a_{is})$ y la columna j de la segunda, o sea $(b_{1j}, \ldots, b_{sj})$ que por hipótesis tienen igual longitud, y el coeficiente buscado será $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj}$. La matriz resultante tendrá entonces tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

Si queremos, por ejemplo, multiplicar

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

tendremos, para el lugar (1, 1) el coeficiente $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$, para el (1, 2) el valor $1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5$, etc., obteniéndose el producto

$$\begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -1 \\ 8 & 12 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Ejercicios

Calcular el producto

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Teorema 3.4.6. Sean $\Phi : V_1 \to V_2$, $\Psi : V_2 \to V_3$ transformaciones lineales. Sean $\{V_1, \ldots, V_n\}$ una base de V_1, $\{W_1, \ldots, W_s\}$ una base de V_2 y $\{Z_1, \ldots, Z_r\}$ una base de V_3. Si $\|a_{ik}\|$ es la matriz de Ψ y $\|b_{ij}\|$ es la matriz de Φ, en las bases indicadas, entonces la matriz de $\Psi\,\Phi$ en las bases $\{V_1, \ldots, V_n\}$ $\{Z_1, \ldots, Z_r\}$ es el producto de las matrices $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ij}\|$.

Demostración. Tal como se han construido las matrices de una transformación lineal, la columna j tiene por coeficiente las coordenadas del vector transformado del j-ésimo vector de la base del primer espacio. Es decir, la matriz que buscamos tendrá en dicha columna las coordenadas de $(\Psi\,\Phi)(V_j)$. Pero $(\Psi\,\Phi)(V_j) = \Psi[\Phi(V_j)]$ y $\Phi(V_j)$ tiene por coordenadas los coeficientes de la columna j de la matriz de Φ, es decir

$$\Phi(V_j) = b_{1j}W_1 + \ldots + b_{sj}W_s$$

y

$$\Psi[\Phi(V_j)] = b_{1j}\,\Psi(W_1) + \ldots + b_{sj}\,\Psi(W_s)$$

Pero, en este caso $\Psi(W_1), \ldots, \Psi(W_s)$ se calculan usando la matriz de Ψ, es decir

$$\Psi(W_k) = a_{1k} Z_1 + \ldots + a_{ik} Z_i + \ldots + a_{rk} Z_r$$

Luego

$$\begin{aligned} \Psi[\Phi(V_j)] = {} & b_{1j}(a_{11} Z_1 + \ldots + a_{i1} Z_i + \ldots + a_{r1} Z_r) + \\ & + b_{2j}(a_{22} Z_1 + \ldots + a_{i2} Z_i + \ldots + a_{r2} Z_r) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + b_{sj}(a_{1s} Z_1 + \ldots + a_{is} Z_i + \ldots + a_{rs} Z_r) \end{aligned}$$

Y, sumando, nos queda por coeficiente de Z_i el valor

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{is} b_{sj}$$

que es el escalar, que debe ocupar el lugar (i, j) en la matriz de $\Psi\,\Phi$, como queríamos demostrar.

Ejemplos

Si V_1 es el espacio de las ternas ordenadas de números con bases $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, V_2 el espacio de los pares, tomando como base $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y V_3 el espacio de los polinomios de grado menor que 4, eligiendo por bases: $W_1 = 1$, $W_2 = X$, $W_3 = X^2$, $W_4 = X^3$.

Sean $\Phi : V_1 \to V_2$ definido por

$$\Phi(x, y, z) = (x + y, z)$$

y $\Psi : V_2 \to V_3$ definido por

$$\begin{aligned} \Psi(0, 1) &= 5x^3 + 2x - 1 \\ \Psi(1, 0) &= 3x^2 - 2x + 7 \end{aligned}$$

a) determinar la transformación $\Psi\,\Phi$,

b) calcular las matrices de Ψ, Φ y $\Psi\,\Phi$ en forma directa, verificando la ley de construcción del producto.

Inversa. La transformación identidad $I : V \to V$, definida por $I(X) = X$ para todo X, es una transformación lineal. Existe una transformación identidad para cada espacio vectorial. Eventualmente, si queremos especificar sobre qué espacio estamos trabajando, notaremos I_V, I_W, según se trate de la transformación identidad de V, W, etc.

Definición. Si $\varphi : V \to W$ es una transformación lineal, se llama ***inversa*** de φ a una transformación lineal $\Psi : W \to V$ tal que $\Psi\varphi = I_V$ y $\varphi\Psi = I_W$.

Es evidente que no toda transformación lineal tiene inversa. Por ejemplo, si $V = R^3$, $W = R^2$, ninguna $\varphi : V \to W$ puede tener inversa, ya que si $\Psi : W \to V$, la dimensión de la imagen de Ψ será a lo sumo 2, y como $\operatorname{Im}(\Psi\varphi) \subseteq \operatorname{Im}\Psi$ resulta $\dim \operatorname{Im}(\Psi\varphi) \leq 2$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}(\Psi\varphi) \neq V$, y deben existir vectores X con $X \notin \operatorname{Im}(\Psi\varphi)$; por consiguiente $\Psi\varphi(X) \neq X$ y $\Psi\varphi \neq I$.

Como esto vale para todos los $\Psi : W \to V$ no existe Ψ con $\Psi\varphi = I_V$.

Nos interesa conocer bajo qué condiciones una transformación lineal tiene inversa.

Resulta de la definición que si Ψ es inversa de φ, entonces φ es inversa de Ψ.

Teorema 3.4.7. Si $I : V \to V$ es la transformación identidad, para todo $\varphi : V \to W$, $\Psi : W \to V$ se tiene $\varphi I = \varphi$ e $I\Psi = \Psi$.

Demostración:

$$(\varphi I)(X) = \varphi(I(X)) = \varphi(X) \text{ para todo } X,$$

luego $\varphi I = \varphi$

$$(I\Psi)(X) = I(\Psi(X)) = \Psi(X) \text{ para todo } X,$$

luego $I\Psi = \Psi$.

Teorema 3.4.8. Si $\Phi : V \to W$ tiene inversa, dicha inversa es única.

Demostración. Si Ψ_1, Ψ_2 son inversas de Φ (es decir, satisfacen las condiciones de la definición), tenemos

$$\Phi\Psi_2 = I, \quad \Psi_1\Phi = I,$$

luego

$$\Psi_1 = \Psi_1 I = \Psi_1(\Phi\Psi_2) = (\Psi_1\Phi)\Psi_2 = I\Psi_2 = \Psi_2.$$

Teorema 3.4.9. Sea $\Phi : V \to W$ una transformación lineal. Si existe inversa $\Psi : W \to V$, entonces Ker $\Phi = (0)$, Im $\Phi = W$.

Demostración. Si $\Psi\Phi = I_V$, tendremos, para todo $X \in V$

$$(\Psi\Phi)(X) = X.$$

Si $X \in$ Ker Φ, entonces

$$(\Psi\Phi)(X) = \Psi[\Phi(X)] = \Psi(0) = 0, \text{ luego } X = 0.$$

Esto dice que el único vector en Ker Φ es el cero, luego Ker $\Phi = (0)$.

Si $\Phi\Psi = I_W$, para todo $Y \in W$ se tiene

$$Y = (\Phi\Psi)(Y) = \Phi(\Psi(Y)),$$

y si llamamos

$$Z = \Psi(Y) \in V$$

resulta

$$Y = \Phi(Z)$$

luego

$$W \subseteq \operatorname{Im}\Phi$$

pero, como Im $\Phi \subseteq W$ (porque $\Phi : V \to W$), resulta Im $\Phi = W$.

Corolario. Si $\Phi : V \to W$ tiene inversa, entonces $\dim V = \dim W$.

Demostración. Según el teorema 3.2.6 tenemos

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\Phi + \dim \operatorname{Im}\Phi,$$

pero Ker $\Phi = (0)$ implica dim Ker $\Phi = 0$ y de $W = \operatorname{Im}\Phi$ resulta $\dim V = \dim W$.

Este corolario muestra que sólo pueden existir transformaciones con inversa cuando el dominio y el codominio tienen igual dimensión.

Definición. Se llama isomorfismo a una transformación lineal con inversa.

Teorema 3.4.10. Si $\Phi : V \to W$ es una transformación lineal tal que Ker $\Phi = (0)$, Im $\Phi = W$, entonces Φ es un isomorfismo.

Demostración. Volviendo a utilizar el teorema 3.2.6, las condiciones anteriores implican $\dim W = \dim V$. Sea $V_1, \ldots, V_n$ una base de V, entonces, según el teorema 3.2.4, $\Phi(V_1), \ldots, \Phi(V_n)$ es un conjunto de generadores de Im Φ, que en este caso es igual a W.

Llamemos $W_1 = \Phi(V_1), \ldots, W_n = \Phi(V_n)$. Demostremos que

$$W_1, \ldots, W_n$$

son linealmente independientes.

En efecto, si $a_1W_1 + \ldots + a_nW_n = 0$, entonces, como

$$0 = a_1W_1 + \ldots + a_nW_n = \Phi(a_1V_1 + \ldots + a_nV_n),$$

resulta $a_1V_1 + \ldots + a_nV_n \in \operatorname{Ker}\Phi$, y, como $\operatorname{Ker}\Phi = (0)$, entonces $a_1V_1 + \ldots + a_nV_n = 0$, pero $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es una base V, por lo tanto l.i., luego necesariamente $a_1 = o, \ldots, a_n = o$.

Como $\dim W = \dim V = n$ y $W_1, \ldots, W_n$ son l.i., el corolario del teorema 2.4.6 dice que $\{W_1, \ldots, W_n\}$ es una base de W.

Según el teorema 3.1.2 existe una transformación lineal

$$\Psi : W \to V$$

definida por $\Psi(W_1) = V_1, \ldots, \Psi(W_n) = V_n$.

Para verificar que Ψ es la inversa de Φ, veamos que

$$(\Psi\Phi)(V_1) = V_1, \ldots, (\Psi\Phi)(V_n) = V_n$$

y, como $\Psi\Phi$ e I_V coinciden en la base $V_1, \ldots, V_n$, resulta (usando otra vez el teorema 3.1.2) que $\Psi\Phi = I_V$. De forma análoga se demuestra que $\Phi\Psi = I_W$.

Teorema 3.4.11. Si $\dim V = \dim W$, existe siempre un isomorfismo $V \to W$.

Demostración. Basta elegir una base $V_1, \ldots, V_n$ de V y una base $W_1, \ldots, W_n$ de W y definir Φ por $\Phi(V_i) = W_i$, y Ψ por $\Psi(W_i) = V_i$. Para verificar $\Phi\Psi = I$, $\Psi\Phi = I$ se sigue el mismo procedimiento del teorema anterior.

Ejercicios

Verificar si las siguientes transformaciones lineales $\Phi_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son isomorfismos:

$$\Phi_1 (x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$
$$\Phi_2 (x, y, z) = (x, y, z - x - y)$$
$$\Phi_3 (x, y, z) = (2x, x + y, x + y + z)$$
$$\Phi_4 (x, y, z) = (x, y + z, y + z)$$
$$\Phi_5 (x, y, z) = (x, y + z, y - z)$$

Teorema 3.4.12. Si dim V = dim W, $\Phi : V \to W$ y $\Psi : W \to V$ verifican $\Psi \Phi = \mathrm{id}$, entonces $\Phi \Psi = \mathrm{id}$.

Demostración. Si $\Psi \Phi = \mathrm{id}$, y $X \in \mathrm{Ker}\ \Phi$, entonces $\Phi(X) = 0$, pero $(\Psi \Phi)(X) = X$, luego $X = (\Psi \Phi)(X) = \Psi[\Phi(X)] = \Psi(0) = 0$, es decir $X \in \mathrm{Ker}\ \Phi$ implica $X = 0$, luego $\mathrm{Ker}\ \Phi = 0$.

Como dim Im Φ = dim V - dim Ker Φ, tenemos dim Im Φ = dim V = = dim W, y, como Im $\Phi \subseteq W$, resulta Im $\Phi = W$.

Por tanto, el teorema 3.4.10 dice que Φ es un isomorfismo, y como la inversa es única, Ψ es la inversa de Φ.

Teorema 3.4.13. Si dim V = dim W (en particular, si V = W). $\varphi : V \to W$, entonces φ es un isomorfismo si, y sólo si, Ker $\varphi = (0)$.

Demostración. Si φ es isomorfismo, Ker $\varphi = \{0\}$ según el teorema 3.4.10. Si Ker $\varphi = \{0\}$, dim Ker φ = o, y aplicando el teorema 3.2.6, resulta

$$\dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim V = \dim W.$$

Pero Im φ es un subespacio de W, luego de dim Im φ = dim W se deduce Im φ = W (teorema 2.6.2) y por consiguiente es aplicable el teorema 3.4.10 que asegura que φ es un isomorfismo.

Inversa de una matriz. Según el corolario del teorema 3.4.8 y el teorema 3.4.12, si $\|a_{ij}\|$ es la matriz que representa una cierta transformación lineal para que tenga inversa es necesario que sea una matriz cuadrada y, siendo cuadrada, si existe $\|b_{ij}\|$ con

$$\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|I\|$$

entonces también

$$\|b_{ij}\| \cdot \|a_{ij}\| = \|I\|.$$

La inversa de una matriz $\|a_{ij}\|$ será una matriz $\|b_{1k}\|$, tal que $\|a_{ij}\| \cdot \|b_{1k}\| = \|I\|$, donde $\|I\|$ es la matriz identidad, es decir, la matriz que tiene coeficientes 1 en la diagonal y ceros fuera de ella.

Los coeficientes b_{ik} deben satisfacer entonces

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

Utilizando las reglas de formación del producto de matrices, encontramos que los coeficientes de la primera columna de la matriz $\|b_{ik}\|$ deben cumplir

$$\begin{array}{l} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \dots + a_{1n}\, b_{n1} = 1 \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + \dots + a_{2n}\, b_{n1} = 0 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad . \\ a_{n1}\, b_{11} + a_{n2}\, b_{21} + \dots + a_{nn}\, b_{n1} = 0 \end{array}$$

Del mismo modo, para los elementos de las otras columnas, encontramos condiciones semejantes, por ejemplo, para la segunda columna tendremos

$$\begin{array}{l} a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + \dots + a_{1n}\, b_{n2} = 0 \\ a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + \dots + a_{2n}\, b_{n2} = 1 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad . \\ a_{n1}\, b_{12} + a_{n2}\, b_{22} + \dots + a_{nn}\, b_{n2} = 0 \end{array}$$

Si se considera los b_{ik} como incógnitas, estos sistemas de ecuaciones lineales pueden ser resueltos por cualquiera de los métodos elementales. Si tienen soluciones, éstas serán los coeficientes de $\|b_{ik}\|$, y si no la tienen significa que $\|a_{ij}\|$ no tiene inversa.

Este método resulta excesivamente largo para el cálculo por lo que conviene utilizar otro más sencillo.

Si $A = \|a_{ij}\|$ es la matriz dada, y si encontramos matrices

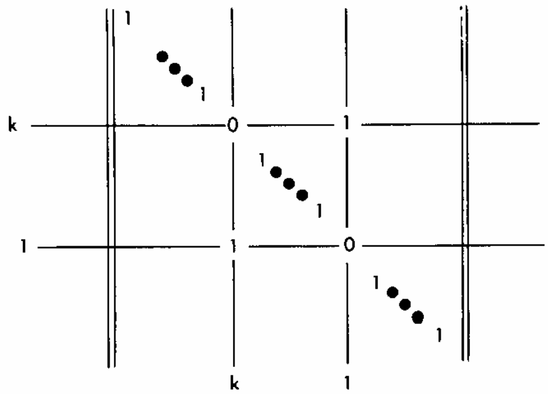
$$B_1, \dots, B_r$$

tales que $B_r \dots B_1 \cdot A = I$, entonces la inversa de A será

$$B_r, \dots, B_1.$$

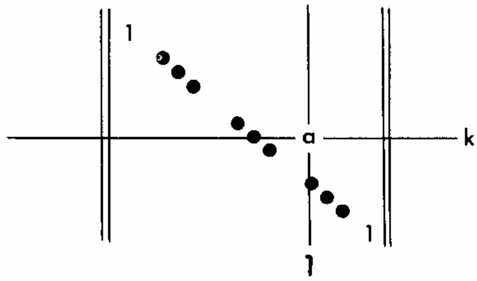
Utilizaremos matrices B_j de los siguientes tipos:

a) T_{kl}, la matriz deducida de la identidad permutando las filas k con l, es decir, la matriz



Si $\|a_{ij}\|$ es una matriz cualquiera, entonces $T_{kl} \cdot \|a_{ij}\|$ es la matriz que resulta de $\|a_{ij}\|$ intercambiando las filas k con l.

b) E^a_{kl} $(k \neq l)$ es la matriz obtenida de la matriz identidad reemplazando el cero del lugar (k, l) por el número a, es decir



Entonces $E^a_{kl} \cdot \|a_{ij}\|$ es la matriz obtenida de $\|a_{ij}\|$ sumando a la fila k a veces la fila l.

c) M^a_k es la matriz obtenida de la identidad reemplazando el 1 del lugar (k, k) por el número a. Entonces $M^a_k \cdot \|a_{ij}\|$ es la matriz obtenida de $\|a_{ij}\|$ multiplicando la fila k por el número a.

Esto se verifica haciendo las cuentas correspondientes.

El procedimiento consiste entonces en:

1. Cambiar el orden de las filas, de ser necesario, para que el elemento que ocupa el lugar (1, 1) sea diferente de cero. (Con esta operación basta, pues, si todos los elementos de la primera columna fueran cero, entonces la matriz representaría una transformación lineal donde el primer vector de base se anula y, por lo tanto, no podría tener inversa.)

Esto significa que $B_1 = T_{k.1}$.

2. Si $a_{11} \neq 0$, multiplicar la primera fila por $1/a_{11}$, es decir tomar $B_2 = M_1^{1/a_{11}}$.

3. Sumar a cada fila i, $-a_{i1}$ veces la primera, o sea tomar $B_3 = E_{21}^{-a_{21}}$, etc.

En esta forma la matriz se ha reducido a:

$$\begin{Vmatrix} 1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{Vmatrix}$$

Consideremos ahora la segunda columna. Si $a_{i2}^1 = 0$ para todo $i \neq 1$, tendremos que esta matriz representa una transformación lineal Φ, tal que $\Phi(V_1) = W_1$, $\Phi(V_2) = a_{12}^1 W_1$, luego $a_{12}^1 V_1 - V_2 \neq 0$ y $\Phi(a_{12}^1 V_1 - V_2) = 0$, luego no puede tener inversa.

Existirá entonces un $a_{s2} \neq 0$ $s \neq 1$ y seguimos el mismo procedimiento usado para la primera fila. Para las columnas siguientes se procede de igual modo.

Para obtener en forma directa el producto de los B, vamos haciendo, sobre la matriz identidad, las mismas operaciones que sobre la matriz original.

Ejemplo

Buscar la inversa de

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Tomamos las matrices

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

en primer lugar intercambiamos la primera y la segunda fila

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

quedando a la derecha la matriz $T_{12} \cdot I = T_{12}$.

Luego multiplicamos la primera fila por $^1/a_{11} = {}^1/_2$ y resulta

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & ^3/_2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & ^1/_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

y como tercera etapa (ya tenemos $a_{21} = 0$) se suma dos veces la primera fila a la tercera y queda

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & ^3/_2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & ^1/_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Como en el lugar (2, 2) no hay cero no hace falta permutación de filas y comenzamos multiplicando la segunda fila por $^1/_2$, luego

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & ^3/_2 \\ 0 & 1 & ^1/_2 \\ 0 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & ^1/_2 & 0 \\ ^1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Ahora sumamos a la primera fila -1 veces la segunda, y a la tercera fila -3 veces la segunda, y resulta

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & ^1/_2 \\ 0 & 0 & ^5/_2 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} -^1/_2 & ^1/_2 & 0 \\ ^1/_2 & 0 & 0 \\ -^3/_2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Para la tercera fila se multiplica por $^2/_5$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & ^1/_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} -^1/_2 & ^1/_2 & 0 \\ ^1/_2 & 0 & 0 \\ -^3/_5 & ^2/_5 & ^2/_5 \end{matrix} \right\|$$

y se suma a la primera fila -1 veces ésta y a la segunda $-^1/_2$ veces la tercera, resultando por fin

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} ^1/_{10} & ^1/_{10} & -^2/_5 \\ ^4/_5 & -^1/_5 & -^1/_5 \\ -^3/_5 & ^2/_5 & ^2/_5 \end{matrix} \right\|$$

y la matriz de la derecha es la inversa buscada.

Ejercicios

Calcular las inversas de las siguientes matrices:

1. $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$

2. $\left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|$

3. $\begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$

4. $\| 3 \|$

5. Cambios de Base

Hemos visto que, dado un espacio vectorial, hay muchas posibilidades de obtener bases.

Dado un vector y fijada una base ordenada dicho vector queda determinado por el conocimiento del conjunto ordenado de sus coordenadas. Del mismo modo, dada una transformación lineal $V \to W$, una base de V y una base de W se deduce una matriz que caracteriza la transformación.

Se nos presentan entonces cuatro problemas elementales cuando nosotros cambiamos la base elegida:

1. Conocidas las coordenadas de un vector respecto a una base, ¿cuáles serán sus coordenadas en la nueva base?

2. Si un conjunto de coordenadas representa un vector en una base, ¿cuál es el vector representado por las mismas coordenadas en la nueva base?

3. Conocida la matriz de una transformación, ¿cuál es la matriz de la misma transformación si se cambian las bases del dominio y del codominio?

4. Si una matriz representa una cierta transformación lineal, ¿cuál es la transformación representada por la misma matriz si se toman nuevas bases del dominio y codominio?

Antes de considerar los problemas citados veamos algo de terminología. Consideremos un espacio vectorial V y una base ordenada $V_1, \ldots, V_n$; entonces, si $V_1', \ldots, V_n'$ es una nueva base, por ser éstos vectores de V, podemos escribir cada uno en función de $V_1, \ldots, V_n$, es decir, sean

$$\begin{aligned} V_1' &= a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + \ldots + a_{n1}V_n \\ V_2' &= a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + \ldots + a_{n2}V_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n' &= a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + \ldots + a_{nn}V_n \end{aligned}$$

Si llamamos $\|A\| = \|a_{ij}\|$ a la matriz formada por las coordenadas de todos ellos, $\|A\|$ representa, en la base $V_1, \ldots, V_n$, una transformación lineal del espacio V en sí mismo, que llamaremos A.

Atención: La matriz $\|A\|$ se construye escribiendo como primera *columna* las coordenadas de V_1', como segunda columna las de V_2', etc. Entonces, la transformación A, representada por la matriz $\|A\|$ en la base $V_1, \ldots, V_n$ que está determinada por $A(V_1) = V_1', \ldots, A(V_n) = V_n'$.

Como $V_1', \ldots, V_n'$ es también una base de V, debe existir una transformación B definida por $B(V_1') = V_1, \ldots, B(V_n') = V_n$ (véase el teorema 3.1.2), luego $BA(V_1) = V_1, \ldots, BA(V_n) = V_n$ (véase el teorema 3.4.5), por lo tanto BA es la identidad, es decir, A tiene inversa (véase el teorema 3.4.12).

Del mismo modo, si $\varphi : V \to W$ es una transformación lineal, llamaremos $W_1, \ldots, W_r$ la base de W, $W_1', \ldots, W_r'$ la nueva base, $\|C\|$ la matriz formada por los coeficientes de los W_i' y C la transformación que, en la base $W_1, \ldots, W_r$, representa la matriz $\|C\|$.

Llamaremos v a la base ordenada $V_1, \ldots, V_n$, v' a la base ordenada $V_1', \ldots, V_n'$; w, w' las bases $W_1, \ldots, W_r$ y $W_1', \ldots, W_r'$, respectivamente.

Como vamos a relacionar matrices en bases distintas, si, por ejemplo, $\varphi : V \to W$, la matriz φ calculada con la base v de V y la base w de W se escribirá ${}_v\|\varphi\|_w$. Si $\varphi : V \to V$ y usamos la misma base v para construir la matriz considerada como base de dominio y de codominio, escribiremos simplemente $\|\varphi\|_v$.

El problema 2 se resuelve fácilmente según el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de un vector X en la base v, entonces las mismas coordenadas corresponden al vector A(X) en la base v'.

Demostración. Según las consideraciones precedentes, la transformación lineal A se caracterizaba por

$$A(V_1) = V_1', \ldots, A(V_n) = V_n'.$$

Entonces, si $X = x_1V_1 + \ldots + x_nV_n$, resulta

$$\begin{aligned} A(X) &= x_1 A(V_1) + \ldots + x_n A(V_n) \\ &= x_1V_1' + \ldots + x_nV_n' \end{aligned}$$

es decir, $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de A(X) en la base

$$V_1', \ldots, V_n'.$$

Para el problema 1 tenemos:

Teorema 3.5.2. Sean $(x_1', \ldots, x_n')$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas de un vector fijo V en las bases $\mathcal{v}'$y $\mathcal{v}$, respectivamente, entonces

$$\|A\| \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Demostración. La matriz $\|A\|$ estaba formada por las coordenadas de las V_j' en la base $\mathcal{v}$. Por otro lado tenemos,

$$V = x_1' V_1' + \ldots + x_n' V_n'$$

y reemplazando cada V_j' por su valor, tenemos

$$\begin{aligned} V = & \; x_1'(a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + \ldots + a_{n1}V_n) + \\ & + x_2'(a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + \ldots + a_{n2}V_n) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x_n'(a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + \ldots + a_{nn}V_n) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} V = & \; (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n') V_1 + \\ & + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n') V_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n') V_n \end{aligned}$$

y si ponemos

$$V = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \ldots + x_n V_n$$

tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' \\ x_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' \end{aligned}$$

por lo tanto resulta

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

(usando la fórmula de producto de matrices).

Hemos visto que la transformación A tiene inversa. Luego la matriz $\|A\|$ tiene inversa, o sea $\|A\|^{-1}$, entonces resulta el siguiente corolario.

Corolario. En las condiciones del teorema anterior,

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \|A\|^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

En efecto, tenemos

78

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \|A\|^{-1} \cdot \|A\| \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \|A\|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tratamos ahora los problemas relacionados con una transformación lineal $\varphi : V \rightarrow W$.

La matriz ${}_{v}\|\varphi\|_{w}$ se calcula como hemos visto antes, escribiendo en la columna j-ésima las coordenadas de $\varphi(V_j)$ respecto a la base w, es decir, ${}_{v}\|\varphi\|_{w} = \|d_{ij}\|$ si $\varphi(V_j) = \Sigma_i\, d_{ij}\, W_i$.

Para tener ${}_{v'}\|\varphi\|_{w'}$, debemos calcular $\varphi(V'_j)$ como combinación lineal de $W'_1, \dots, W'_r$. Esto se puede hacer en dos etapas, es decir, calculando primero ${}_{v'}\|\varphi\|_{w}$ y luego ${}_{v'}\|\varphi\|_{w'}$.

Cada columna de ${}_{v'}\|\varphi\|_{w}$ estará compuesta por las coordenadas de $\varphi(V'_j)$ y como $V'_j = a_{1j}\, V_1 + \dots a_{nj}\, V_n$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(V'_j) &= a_{1j}\, \varphi(V_1) + \dots + a_{nj}\, \varphi(V_n) \\ &= a_{1j}\, (d_{11}\, W_1 + \dots + d_{r1}\, W_r) + \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\ a_{nj}(d_{1n}W_1 + \ldots + d_{rn}W_r) = \\
&= (a_{1j}d_{11} + a_{2j}d_{12} + \ldots a_{nj}d_{1n})W_1 + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\ \ (a_{1j}d_{r1} + a_{2j}d_{r2} + \ldots + a_{nj}d_{rn})W_r.
\end{aligned}
$$

Lo que nos dice (usando la fórmula del producto de matrices) que ${}_{\mathcal{V}'}\|\varphi\|_{\mathcal{W}} = {}_{\mathcal{V}}\|\varphi\|_{\mathcal{W}} \cdot \|A\|$.

Ahora bien, como cada columna de ${}_{\mathcal{V}'}\|\varphi\|_{\mathcal{W}}$ es el conjunto de coordenadas de los mismos vectores $\varphi(V_j')$ pero respecto a la base $W_1', \ldots, W_r'$, usando el corolario del teorema 3.5.2 resulta

$$
{}_{\mathcal{V}'}\|\varphi\|_{\mathcal{W}'} = \|C\|^{-1}\ {}_{\mathcal{V}'}\|\varphi\|_{\mathcal{W}}
$$

Teorema 3.5.3. ${}_{\mathcal{V}'}\|\varphi\|_{\mathcal{W}'} = \|C\|^{-1} \cdot {}_{\mathcal{V}}\|\varphi\|_{\mathcal{W}} \cdot \|A\|$.

En particular, si $\varphi : V \to V$ tenemos

Corolario. $\|\varphi\|_{\mathcal{V}'} = \|A\|^{-1}\ \|\varphi\|_{\mathcal{V}}\|A\|$.

El último problema que nos queda por considerar podemos plantearlo por la condición ${}_{\mathcal{V}}\|\varphi\|_{\mathcal{W}} = {}_{\mathcal{V}'}\|\Psi\|_{\mathcal{W}'}$; es decir, φ y Ψ son dos transformaciones lineales cuyas matrices (la primera referida a las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ y la segunda a las bases $\mathcal{V}'$ y $\mathcal{W}'$) son iguales. Nuestro problema consiste en buscar la relación entre φ y Ψ. Se tiene entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi(V_j) &= d_{1j}W_1 + \ldots + d_{rj}W_r \\
\Psi(V_j') &= d_{1j}W_1' + \ldots + d_{rj}W_r'
\end{aligned}
$$

y utilizando el teorema 3.5.1 como hemos llamado $C : W \to W$ la transformación definida por $C(W_i) = W_i'$, tendremos

$$
\Psi(V_j') = C(\varphi(V_j)) = C \cdot \varphi(V_j)
$$

Por otro lado, teníamos $A : V \to V$, caracterizada por $A(V_j) = V_j'$, luego la ecuación anterior resulta

$$
\Psi(A(V_j)) = \Psi \cdot A\ (V_j) = C \cdot \varphi(V_j)
$$

y esto es válido para $j = 1, \ldots, n$. Luego las transformaciones ΨA y $C\ \varphi$ coinciden en una base y por consiguiente son iguales.

Tenemos entonces

Teorema 3.5.4. Si ${}_{v}\|\varphi\|_{w} = {}_{v'}\|\Psi\|_{w'}$, entonces $\Psi A = C\varphi$, es decir, $\Psi = C\varphi A^{-1}$.

Ejercicio

Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$$

respecto a las bases canónicas

$$v = \{(0,1),(1,0)\} \quad \text{y} \quad w = \{(0,1),(1,0)\}$$

Sean $v' = \{(1,2),(3,1)\}$ y $w' = \{(2,1),(1,5)\}$, calcular ${}_{v'}\|\Phi\|_{w'}$.

4

PRODUCTO INTERNO

1. Definición y Ejemplos

Hemos visto, en los ejemplos de espacios vectoriales, que las fuerzas que pueden actuar sobre un punto y que los desplazamientos de un punto son espacios vectoriales de la misma dimensión y, por lo tanto, isomorfos.

Usando una escala conveniente para cada uno de estos elementos físicos (fuerzas y desplazamientos) podemos identificar ambos espacios vectoriales. Siempre frente al problema físico, una fuerza actuando sobre un punto móvil realiza un trabajo. El trabajo es una magnitud escalar, es decir, que existe una unidad tal que todo trabajo es el producto de un número por dicha unidad.

Veamos ahora algunas propiedades de este trabajo.

Si F_1, F_2 son fuerzas y D_1, D_2 desplazamientos, llamando $T(F, D)$ al trabajo realizado por la fuerza F cuando el punto sufre un desplazamiento D, tenemos:

i) $T(F_1 + F_2, D_1) = T(F_1, D_1) + T(F_2, D_1)$

(Atención: $F_1 + F_2$ representa la fuerza resultante de F_1 y F_2, como en el ejemplo de la página 4, mientras que el signo + del segundo miembro es la suma de los escalares $T(F, D)$. Esto sólo dice que el trabajo que realiza la resultante de dos fuerzas es igual a la suma de los trabajos de cada componente.

i') $T(F_1, D_1 + D_2) = T(F_1, D_1) + T(F_1, D_2)$

(Dejamos a cargo del lector la interpretación física de esta igualdad, para lo cual conviene referirse al ejemplo de la página 7.)

ii) Si k es un número real

$$T(kF, D) = k \cdot T(F, D)$$
$$T(F, kD) = k \cdot T(F, D)$$

lo que podemos leer: el trabajo es proporcional a la fuerza y al desplazamiento (se entiende que debe conservarse la dirección de ambos para poder hablar de proporcionalidad).

iii) Si F y D tienen igual dirección y sentido, $T(F, D) \geq 0$ y si además ninguno de ellos es cero, $T(F, D) \neq 0$.

iv) Si F_1 tiene la dirección de D_2, F_2 la dirección de D_1 y la relación de las intensidades F_1/F_2 es igual a la relación de las amplitudes de los desplazamientos D_2/D_1, entonces

$$T(F_1, D_1) = T(F_2, D_2)$$

Volviendo a la idea de identificar los espacios vectoriales de fuerzas y desplazamientos por medio de una escala cualquiera, podemos interpretar el trabajo como una operación en la que intervienen dos vectores A, B y cuyo resultado es un escalar, que notaremos $\langle A, B\rangle$. Las leyes indicadas anteriormente pueden entonces traducirse en:

1) La cuarta dice que si resulta

$$D_2 = F_1 = A, \quad D_1 = F_2 = B, \text{ entonces}$$

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$$

2) Las propiedades i) y i') pueden escribirse

a) $\langle A_1, B_1 + B_2\rangle = \langle A_1, B_1\rangle + \langle A_1, B_2\rangle$

b) $\langle A_1 + A_2, B\rangle = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$

(Dejamos a cargo del lector verificar que esta última propiedad es consecuencia de 2a) y 1).

3) La condición ii) sería entonces

$$\langle kA, B\rangle = k\langle A, B\rangle$$
$$\langle A, kB\rangle = k\langle A, B\rangle$$

y, por último, iii) dice que si $B = kA$, $k > o$ $B \neq o$, entonces $\langle A, B\rangle > o$, es decir $\langle A, kA\rangle = k\langle A, A\rangle > o$, y como $k > o$, resulta

4) $\langle A, A\rangle > o$ para todo $A \neq o$

(Si $A = o$ úsese 3) para demostrar $\langle A, A\rangle = o$.)

Como vemos, otra vez las ideas físicas nos dan argumentos para desarrollar nuevas ideas matemáticas.

Antes de seguir observemos otro ejemplo. Supongamos que consideramos el espacio vectorial R^2 (pares de números reales) y definimos una operación por la ley:

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

que, a cada par de vectores, hace corresponder un escalar. Estamos, pues, frente al caso en que el resultado de nuestra operación entre vectores no es más un vector.

Si llamamos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ se verifica:

1) $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

2) $\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$

3) $\langle A, kB \rangle = k \langle A, B \rangle$ si k es un escalar

4) $\langle A, A \rangle \geq o$, y $\langle A, A \rangle = o$ sólo cuando $A = o$.

Es decir, encontramos otra vez una operación con las propiedades del primer ejemplo. Estas propiedades son las que caracterizan el producto interno.

Es importante destacar que en un espacio vectorial dado puede haber distintos productos internos. La expresión "distintos productos internos" significa distintas operaciones que cumplen las propiedades de la definición que sigue, y se interpreta como *distintas* aquéllas que, para ciertos pares de vectores, dan resultados diferentes.

Es conveniente, pues, interpretar el producto interno como una función a dos variables, ambas vectores de un mismo espacio V, tal que los valores de esta función son escalares. En otras palabras, una función del producto cartesiano en los números reales.

Nosotros trabajaremos siempre con espacios de dimensión finita.

Definición. Se llama *producto interno* $\langle , \rangle$ en un espacio vectorial V a una función que a cada par ordenado de vectores A, B hace corresponder un escalar (es decir, un número real), $\langle A, B \rangle$, tal que

$P_1)$ $\langle A_1 + A_2, B\rangle = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$
$P_2)$ $\langle kA, B\rangle = k\langle A, B\rangle$
$P_3)$ $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$
$P_4)$ $\langle A, A\rangle \geq o$, y $\langle A, A\rangle = o$ si, y sólo si, $A = 0$.

Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$, espacio de ternas, y definamos

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

2. Sea $V = \mathbb{R}^2$, definamos ahora

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2)\rangle = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 5a_2 b_2.$$

Conviene verificar con detalle este ejemplo y ver que ahora se define un producto interno distinto al definido en el ejemplo con que se inició este capítulo.

3. Para ver que no es necesario que V tenga dimensión finita, tomemos como V el espacio de las funciones continuas definidas en el segmento $[o, 1]$ y definamos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

(Para verificar que $\langle f, f\rangle = o$ implica $f = o$ debemos recordar que estamos trabajando con funciones definidas en el intervalo $[o, 1]$; es decir, que no consideramos las posibles extensiones de cada función fuera de dicho intervalo.)

4. Sea V el conjunto de los polinomios, y si $p = a_0 + a_1 X + \ldots.$, $q = b_0 + b_1 X + \ldots.$, definimos

$$\langle p, q\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots.$$

Aquí conviene observar que tanto los a_i como los b_i valen cero de un cierto índice en adelante y, por lo tanto, la suma $a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots.$ es siempre finita.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y supongamos fijadas una base $\{V_1, \ldots V_n\}$. Si $A = a_1 V_1 + \ldots + a_n V_n$ y $B = b_1 V_1 + \ldots. b_n V_n$, definamos

$$\langle A, B\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

En este ejemplo se ve cómo al cambiar de base es posible obtener distintos productos internos. Igualmente, se verá más adelante que, para cada producto interno existe alguna base donde el producto se puede calcular por la fórmula anterior.

6. Sea V un espacio vectorial donde está definido un producto interno $\langle , \rangle$ y sea $T: V \to V$ un isomorfismo, entonces la función $\langle\langle A, B \rangle\rangle = \langle T(A), T(B) \rangle$ es un producto interno.

Nota. El lector debe verificar que cada uno de estos ejemplos satisface las propiedades P_1), P_2), P_3) y P_4).

2. Desigualdad de Schwarz

Hemos visto que en un espacio vectorial se pueden definir distintos productos internos. Interesa considerar ahora un espacio donde ya se suponga definido un cierto producto interno que se mantendrá fijo.

La razón de esta restricción es fácil de entender. Como veremos inmediatamente, el producto interno está íntimamente ligado a las nociones de distancia y de ángulo y, por lo tanto, tan pronto como queramos introducir dichos conceptos métricos en un espacio vectorial debemos restringirnos a un producto interno bien determinado.

Definición. Se llama ***espacio con producto interno*** a un espacio vectorial V junto con un producto interno $\langle , \rangle$ definido en V.

Estamos, entonces, frente a una estructura más rica que la del espacio vectorial. La presencia de un producto interno fijo nos permitirá obtener propiedades adicionales a las estudiadas en los capítulos anteriores.

Definición. Si V es un espacio con producto interno, se llama *norma* de un vector A, $N(A) = \langle A, A \rangle$.

Entonces, N resulta una función de una sola variable $N: V \to \mathbb{R}$.

La norma verifica las siguientes propiedades:

N_1) $N(k \cdot A) = k^2 N(A)$

En efecto,
$$\begin{aligned} N(kA) &= \langle kA, kA \rangle = \\ &= k\langle A, kA \rangle = k\langle kA, A \rangle = k^2 \langle A, A \rangle = \\ &= k^2 N(A) \end{aligned}$$

N_2) $N(A + B) - N(A) - N(B) = 2\langle A, B \rangle$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
N(A + B) &= \langle A + B, A + B\rangle = \\
&= \langle A, A + B\rangle + \langle B, A + B\rangle = \\
&= \langle A + B, A\rangle + \langle A + B, B\rangle = \\
&= \langle A, A\rangle + \langle B, A\rangle + \langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle = \\
&= N(A) + 2\langle A, B\rangle + N(B).
\end{aligned}
$$

La propiedad N_2 muestra que, conocida la función norma, se puede conocer el producto interno usando la fórmula

$$\langle A, B\rangle = \tfrac{1}{2}(N(A + B) - N(A) - N(B)).$$

Puesto que $N(A) = \langle A, A\rangle$, resulta por P_4) que $N(A) \geq o$ y $N(A) = o$ si, y sólo si, $A = o$, luego $N(A)$ tiene siempre raíz cuadrada real.

Definición. Se llama *longitud* de un vector A (y se escribe $\|A\|$) a la raíz cuadrada positiva de la norma de A.

Teorema 4.2.1. Si V es un espacio con producto interno, se verifica

L_1) $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$
L_2) $\|A\| \geq o$, $\|A\| = o$ si, y sólo si, $A = o$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\|kA\| &= \left|\sqrt{\langle kA, kA\rangle}\right| = \left|\sqrt{k^2\langle A, A\rangle}\right| \\
&= |k|\left|\sqrt{\langle A, A\rangle}\right| = |k|\,\|A\|.
\end{aligned}
$$

Hemos usado la notación $|\ |$ para indicar el valor absoluto. L_2) resulta directamente de la definición.

Teorema 4.2.2. (Desigualdad de Schwarz) Si V es un espacio con producto interno, entonces

$$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Demostración. Consideremos $N(A + kB)$, que ya hemos visto es siempre no negativa.

$$
\begin{aligned}
N(A + kB) &= \langle A + kB, A + kB\rangle = \\
&= \langle A, A\rangle + 2k\langle A, B\rangle + k^2\langle B, B\rangle = \\
&= N(A) + 2k\langle A, B\rangle + k^2 N(B).
\end{aligned}
$$

Si consideramos esta última expresión como un trinomio de segundo grado con variable k, sabemos que $N(A + kB) \geq o$ para todo k, por lo que ese trinomio no puede tener dos raíces diferentes, luego su discriminante no puede ser positivo, es decir

$$4\langle A, B\rangle^2 - 4N(A)\,N(B) \leq o$$
$$\langle A, B\rangle^2 - N(A)\,N(B) \leq o$$
$$\langle A, B\rangle^2 \leq N(A)\,N(B).$$

Tomando las raíces cuadradas positivas (para conservar la desigualdad) resulta

$$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Teorema 4.2.3. (Desigualdad triangular) Si V es un espacio con producto interno

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\|A + B\|^2 &= \langle A + B, A + B\rangle = \\ &= \langle A, A\rangle + 2\langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle \leq \\ &\leq N(A) + 2\|A\| \cdot \|B\| + N(B) = \\ &= \|A\|^2 + 2\|A\| \cdot \|B\| + \|B\|^2 = \\ &= (\|A\| + \|B\|)^2.\end{aligned}$$

Luego, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ por ser ambas las raíces cuadradas positivas.

Si llamamos distancia $\delta(A, B)$ entre dos vectores A y B a la longitud del vector A-B, queda definida, en el espacio vectorial dado, una métrica con las propiedades corrientes:

a) $\delta(A, B) \geq o$, la igualdad válida si, y sólo si, $A = B$.
b) $\delta(A, B) = \delta(B, A)$
c) $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C)$.

(Queda como ejercicio para el lector verificar dichas propiedades.)

Aplicaciones

1. Del ejemplo 3 del 4.1 resulta, usando el teorema 4.2.2:

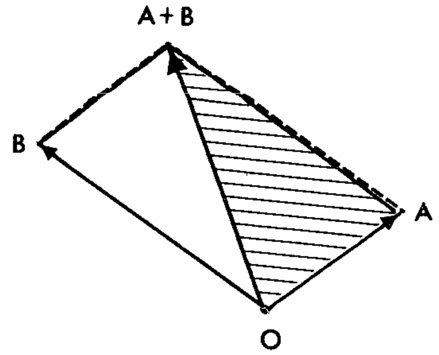
$$\left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \left(\int_0^1 f(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (g(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para cualquier par de funciones continuas f, g.

2. Usando el ejemplo 5 se deduce, si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ son números reales, que

$$|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + \ldots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3. El teorema 4.2.3 tiene una aplicación geométrica inmediata. Usando la ley del paralelogramo y suponiendo conocido el hecho de que los lados opuestos de un paralelogramo tienen igual longitud, y considerando un triángulo como determinado por los vértices O, A, A + B, el teorema 4.2.3 dice que la longitud de un lado es menor que la suma de los otros dos. (En realidad, aquí el teorema dice "menor o igual", aunque se puede demostrar que "igual" sólo corresponde al caso en que O, A, A + B están alineados, es decir que no existe triángulo.)



Ejercicio

Buscar una demostración de la aplicación dos sin utilizar la desigualdad de Schwarz.

4. La desigualdad de Schwarz puede escribirse

$$-1 \leq \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \leq 1$$

y por consiguiente permite definir *ángulo* entre dos vectores $\alpha(A, B)$ por la fórmula

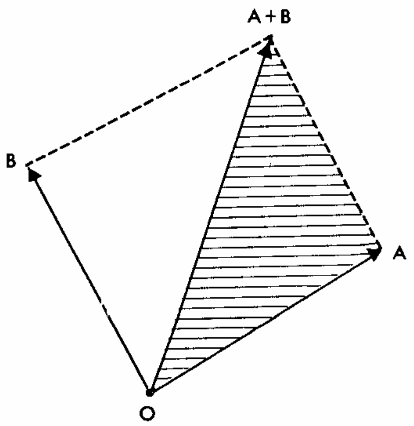
$$\cos \alpha(A, B) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}$$

De donde resulta la fórmula del "producto escalar" que se define en algunas partes como

$$\langle A, B \rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \alpha(A, B).$$

5. Volviendo a considerar la figura del 4.2 y el triángulo O, A, A + B, observando que el ángulo A del triángulo es complementario del ángulo $\alpha(A, B)$ de los vectores (luego $\cos \alpha(A, B) = -\cos A$)

Resulta



$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\langle A, B\rangle =$$
$$= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\| \cdot \|B\| \cos \alpha(A, B) =$$
$$= \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\| \cdot \|B\| \cos A$$

(fórmula del coseno).

6. En otro caso particular, si A y B son ortogonales, el triángulo O, A, A + B es rectángulo, y resulta $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$, con lo que tenemos otra demostración del teorema de Pitágoras.

3. Bases Ortonormales

En la geometría analítica clásica se utilizan los sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales. Introducidos los conceptos de longitud y ángulo, buscaremos un equivalente para nuestra teoría, es decir, una base formada por vectores de longitud 1 y ortogonales entre sí.

Definición. Si V es un espacio con producto interno, dos vectores A, B se dicen ortogonales (o perpendiculares) si $\langle A, B\rangle = o$.

Definición. Un conjunto de vectores $\{V_i\}$ se dice ortogonal si para todo par de índices $i \neq j$, V_i es ortogonal a V_j, es decir, $\langle V_i, V_j\rangle = o$.

Definición. Un conjunto de vectores $\{V_i\}$ se dice ortonormal si es ortogonal y además $\|V_i\| = 1$ para todo i.

Ejemplos

1. En el ejemplo introductorio de 4.1, los vectores (a, b) y (b, - a) son ortogonales. Ellos serán ortonormales si, y sólo si, $a^2 + b^2 = 1$.

2. En el ejemplo 3 de 4.1 las funciones

$f_1 =$ sen x', $f_2 =$ sen $2x'$, $f_3 =$ sen $3x'$, ...
$g_1 =$ cos x', $g_2 =$ cos $2x'$, $g_3 =$ cos $3x'$, ..., con $x' = \frac{1}{2\pi} x$,

forman un conjunto ortogonal.

3. En el ejemplo 1 de 4.1, los vectores (1, o, o), (o, o, 1) forman un conjunto ortonormal.

Ejercicios

Buscar conjuntos ortonormales de los ejemplos 2 y 4 de 4.1.

Definición. Si V es un espacio con producto interno, de dimensión finita, diremos que $V_1, \ldots, V_n$ es una *base ortonormal* si es una base y además es un conjunto ortonormal.

La importancia de las bases ortonormales radica en el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. Sea V un espacio con producto interno y $V_1, \ldots, V_n$ una base ortonormal. Para todo par de vectores

$$A = a_1 V_1 + \ldots + a_n V_n, \quad B = b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n$$

se tiene

$$\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n .$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle &= \langle a_1 V_1 + \ldots + a_n V_n, \ b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n \rangle \\
&= \langle a_1 V_1, \ b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n \rangle + \\
&+ \langle a_2 V_2, \ b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n \rangle + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \langle a_n V_n, \ b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n \rangle = \\
&= a_1 b_1 \langle V_1, V_1 \rangle + a_1 b_2 \langle V_1, V_2 \rangle + \ldots + a_1 b_n \langle V_1, V_n \rangle + \\
&+ a_2 b_1 \langle V_2, V_1 \rangle + a_2 b_2 \langle V_2, V_2 \rangle + \ldots + a_2 b_n \langle V_2, V_n \rangle \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_n b_1 \langle V_n, V_1 \rangle + a_n b_2 \langle V_n, V_2 \rangle + \ldots + a_n b_n \langle V_n, V_n \rangle
\end{aligned}$$

Y usando el hecho que $\langle V_i, V_i \rangle = 1$,

$\langle V_i, V_j \rangle =$ o si $i \neq j$, resulta
$\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Nos falta ver ahora que en todo espacio con producto interno, de dimensión finita, existen bases ortonormales.

Esto se hace partiendo de una base cualquiera y aplicando lo que se llama el *método babilónico*.

Teorema 4.3.2. Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es l.i.

Demostración. Sea $V_1, \ldots, V_s$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos. Si $a_1 V_1 + \ldots + a_s V_s = 0$ entonces

$$\langle V_1, a_1 V_1 + \ldots + a_s V_s \rangle = \langle V_1, 0 \rangle = 0$$

pero

$$\langle V_1, a_1 V_1 + \ldots + a_s V_s \rangle = a_1 \langle V_1, V_1 \rangle + \ldots + a_s \langle V_1, V_s \rangle = a_1 \langle V_1, V_1 \rangle$$

por ser ortogonales, luego

$$a_1 \langle V_1, V_1 \rangle = 0 \text{ y } V_1 \neq 0 \text{ implica } \langle V_1, V_1 \rangle \neq 0$$

luego

$$a_1 = 0.$$

Del mismo modo se verifica para los demás coeficientes (tomando, en general, $\langle V_i, \quad \rangle$).

Método Babilónico. Sea V un espacio con producto interno, de dimensión finita, y sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una base.

Tomemos primero $V_1 = \dfrac{1}{\|A_1\|} \cdot A_1$ entonces

$$\langle V_1, V_1 \rangle = \langle \frac{1}{\|A_1\|} A_1, \frac{1}{\|A_1\|} A_1 \rangle = \frac{1}{\|A_1\|^2} \langle A_1, A_1 \rangle = \frac{1}{N(A_1)} N(A_1) = 1$$

(Esto es posible porque A_1, parte de una base, implica $A_1 \neq 0$, luego $N(A_1) \neq 0$, es decir, se puede dividir por $\|A_1\|$).

Tomemos

$$W_2 = A_2 - \langle A_2, V_1 \rangle V_1$$

entonces tenemos $\langle V_1, W_2 \rangle = 0$ (verifíquese).

Y si llamamos,

$$V_2 = \frac{1}{\| W_2 \|} W_2$$

resulta

$$\langle V_1, V_2 \rangle = o, \quad \langle V_2, V_2 \rangle = 1$$

La construcción continúa observando que V_1 es múltiplo de A_1, V_2 es combinación lineal de A_1 y A_2, y si suponemos encontrado hasta V_r, tal que:

1. $\langle V_i, V_i \rangle = 1$, para todo $i \leq r$;

2. $\langle V_i, V_j \rangle = o$, si $i \neq j$, $i \leq r$, $j \leq r$, y

3. V_i es combinación lineal de $A_1, \ldots, A_i$, entonces podemos construir V_{r+1} tomando

$$W_{r+1} = A_{r+1} - \langle A_{r+1}, V_1 \rangle V_1 - \langle A_{r+1}, V_2 \rangle V_2 - \ldots - \langle A_{r+1}, V_r \rangle V_r$$

Y luego

$$V_{r+1} = \frac{1}{\| W_{r+1} \|} W_{r+1}.$$

Queda a merced de la paciencia del lector verificar que $V_1, \ldots, V_n$ es una base ortonormal.

Ejercicio

Calcular una base ortonormal para el ejemplo 2 de 4.1.

4. Transformaciones Ortogonales

La idea de transformación lineal de un espacio vectorial en otro era la de una función o aplicación φ que preservara los elementos fundamentales de su estructura, en este caso sus operaciones de suma y producto por un escalar. Esta propiedad se traducía en las condiciones

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$
$$\varphi(kA) = k\,\varphi(A).$$

Si trabajamos ahora en espacios vectoriales con producto interno, deseamos estudiar también aplicaciones que conserven todas sus propiedades estructurales, es decir, que además de respetar la suma y el producto por un escalar, conserven el producto interno, lo que se puede expresar por

$$\langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle = \langle A, B \rangle$$

Restrinjámonos a las aplicaciones de un espacio V en sí mismo, de dimensión finita.

Definición. Si V es un espacio con producto interno, se llama *transformación ortogonal* en V a una t. l. $\varphi : V \to V$ tal que

$$\langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle = \langle A, B \rangle.$$

En particular, si φ es una transformación ortogonal, se tendrá

$$\langle \varphi(A), \varphi(A) \rangle = \langle A, A \rangle, \text{ es decir, } \| \varphi(A) \| = \| A \|$$

por lo tanto se conservan las longitudes de los vectores.

Como también resulta

$$\frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} = \frac{\langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle}{\|\varphi(A)\| \cdot \|\varphi(B)\|}$$

entonces el ángulo entre A y B es el mismo que entre $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$. Esto nos muestra que una transformación ortogonal conserva las relaciones métricas de los vectores.

Teorema 4.4.1. Toda transformación ortogonal es un isomorfismo.

En efecto, las condiciones $\langle \varphi(A), \varphi(A) \rangle = \langle A, A \rangle$ y $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$ nos muestran que $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Luego $\ker \varphi = 0$; condición que, conjuntamente con $\varphi : V \to V$ y V de dimensión finita, implican, según el teorema 3.4.13, que φ es un isomorfismo.

Teorema 4.4.2. Una t. l. $\varphi : V \to V$ es ortogonal si, y sólo si, transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

Demostración. Supongamos que φ es ortogonal. Por el teorema anterior es un isomorfismo, luego transforma bases en bases. Sea $\{V_1, \ldots, V_n\}$ una base ortonormal, entonces

$$\langle \varphi(V_i), \varphi(V_j) \rangle = \langle V_i, V_j \rangle = \delta_{i,j}$$

(es decir, 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), lo que implica que $\varphi(V_1), \ldots, \varphi(V_n)$ es una base ortonormal.

Recíprocamente, sea $V_1, \ldots, V_n$ una base ortonormal tal que $\varphi(V_1), \ldots, \varphi(V_n)$ es también una base ortonormal. Si $A = a_1 V_1 + \ldots + a_n V_n$, $B = b_1 V_1 + \ldots + b_n V_n$, entonces, según el teorema 4.3.1 tenemos

$$\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Pero también tenemos

$$\varphi(A) = a_1\,\varphi(V_1) + \ldots + a_n\,\varphi(V_n)$$
$$\varphi(B) = b_1\,\varphi(V_1) + \ldots + b_n\,\varphi(V_n)$$

por la linealidad de φ, y siendo $\varphi(V_1), \ldots, \varphi(V_n)$ una base o.n. por hipótesis, volvemos a aplicar el teorema 4.3.1 que nos dice:

$$\langle \varphi(A),\ \varphi(B) \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

luego

$$\langle \varphi(A),\ \varphi(B) \rangle = \langle A,\ B \rangle$$

para todo par de vectores A, B, es decir, φ es ortogonal.

Ejercicios

1. Sea V un espacio de dimensión 2 y $V_1 V_2$ una base ortonormal, a, b dos escalares tales que $a^2 + b^2 = 1$. Verificar que la transformación definida por

$$\varphi(V_1) = aV_1 + bV^2$$
$$\varphi(V^2) = bV_2 - aV_1$$

es ortogonal.

2. Mostrar que la transformación anterior es una rotación del plano de ángulo arctg b/a.

3. Verificar que φ, definida por $\varphi(V_1) = V_1$; $\varphi(V_2) = -V_2$ es ortogonal. Esta es una reflexión cuyo eje es el subespacio generado por V_1.

Teorema 4.4.3. Sea φ una t.l., $V_1, \ldots, V_n$ una base o.n. y $\| a_{ij} \|$ la matriz de φ respecto a dicha base. Entonces φ es ortogonal si, y sólo si, $\Sigma_i\, a_{ij}^2 = 1$, $\Sigma_i\, a_{ij}\, a_{ik} = 0$ para $j \neq k$.

Demostración. En efecto, sabemos que $\varphi(V_j) = \Sigma_i\, a_{ij} V_i$, entonces si φ es ortogonal tenemos

$$1 = \langle V_j, V_j \rangle = \langle \varphi(V_j),\ \varphi(V_j) \rangle = a_{1j} a_{1j} + \ldots + a_{nj} a_{nj} = \Sigma_i\ a_{ij}^2$$

$$0 = \langle V_j, V_k \rangle = \langle \varphi(V_j),\ \varphi(V_k) \rangle = a_{1j} a_{1k} + \ldots + a_{nj} a_{nk} = \Sigma_i\ a_{ij}\, a_{ik}$$

según el teorema 4.3.1, por ser $V_1, \ldots, V_n$ una base o.n.

Recíprocamente, si $\|a_{ij}\|$ verifica las condiciones citadas, tenemos

$$\langle \varphi(V_j), \varphi(V_j) \rangle = 1, \quad \langle \varphi(V_j), \varphi(V_k) \rangle = 0 \text{ si } j \neq k$$

luego por el teorema 4.3.2, $\varphi(V_1), \ldots, \varphi(V_n)$ es un conjunto l.i., que resulta o.n. por las condiciones anteriores. Entonces el teorema 4.4.2 asegura que φ es una transformación ortogonal.

Ejercicios

1. Supongamos que φ es una transformación ortogonal y que existe un vector A tal que $\varphi(A) = k \cdot A$. Demostrar que $k = 1$ ó $k = -1$.

2. Demostrar que toda transformación ortogonal en un espacio de dimensión 2 es o bien una rotación o bien una rotación compuesta con una reflexión.

BIBLIOGRAFIA

Ultimamente han proliferado, principalmente en el idioma inglés, los textos sobre espacios vectoriales. Una introducción puede verse en el libro de *Algebra Moderna* de Birkhoff y MacLane, y un estudio más profundo en *Finite Dimensional Vector Spaces* de Halmos y *Linear Algebra* de Hoffmann y Kunze. Es especialmente interesante por sus aplicaciones geométricas la obra *Linear Algebra* de Greub.

En la actualidad hay muchos textos elementales de introducción al tema, generalmente con el título de *Linear Algebra*, como, por ejemplo, los de Stewart, Swift y Page, Curtis, etc. y *Linear Geometry* como el de Artzy. Más serio, aunque también de carácter elemental, es el de E. Artin, intitulado *Geometric Algebra*.

En español se recomiendan las *Notas de Algebra* de Gentile y, en particular, su fascículo ***Espacios Vectoriales***, que presenta los fundamentos de esta teoría, cuyas aplicaciones geométricas pueden verse en las *Notas de Geometría I* del autor de este fascículo; en portugués, el libro *Algebra Linear e Geometria Euclidiana* de A. A. Martins Rodrigues.

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de matemática

Nº 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de los Estados Unidos de América.
Nº 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
Nº 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
Nº 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
Nº 5. Algebra Lineal, por Orlando Villamayor.

Serie de física

Nº 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
Nº 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.

Serie de química

Nº 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
Nº 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.

Serie de biología

Nº 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
Nº 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
Nº 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
Nº 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.

En preparación

Serie de matemática

Algebra Linear e Geometría Euclidiana, por Alexandre Martins Rodrigues.

Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.
El Concepto de Número, por César A. Trejo.
Programación Lineal, por Enrique Cansado.
Introducción a la Topología, por Juan Horváth.
Funciones de Variable Compleja, por José Nieto.
Algebras de Boole, por Jorge E. Bosch.

Serie de física

Física de Partículas, por Igor Saavedra.
La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
Física Nuclear, por Mariano Bauer E. y Alfonso Mondragón.
Física Cuántica, por Thomas A. Brody.
Experimento y Teoría en la Enseñanza de la Física al Nivel Secundario, por Félix Cernuschi.
Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de la Física, por Darío Moreno.

Serie de química

Mecanismos de Reacciones, por Jorge Brieux.
Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
Complejos, por Manuel Madrazo Garamendi.

Serie de biología

A Vida da Célula, por Renato Basile.
Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
El Comportamiento Animal, por Josué A. Núñez.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Unión Panamericana, Washington, D.C. 20006.